

## KONTROL OPTIMAL MODEL SITR PADA DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI DAN PENGOBATAN

A. Ika Putriani<sup>1\*</sup>, Muh. Rifki Nisardi<sup>2</sup>, Irmayani<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Teknologi Pangan, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie, Parepare, Sulawesi Selatan, Indonesia

<sup>2</sup>Teknik Metalurgi, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie, Parepare, Sulawesi Selatan, Indonesia

<sup>3</sup>Aktuaria, Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie, Parepare, Sulawesi Selatan, Indonesia

Penulis korespondensi: [andiikaputriani497@ith.ac.id](mailto:andiikaputriani497@ith.ac.id)

### ABSTRAK

Virus Hepatitis B (HBV) menyebabkan infeksi peradangan hati dan dapat menyebabkan kematian. Virus HBV menular dengan sangat cepat. Penyakit ini disebut dengan penyakit hepatitis B. Dalam artikel ini, dibahas tentang Model SITR terhadap penyakit Hepatitis B. Model ini menerapkan prinsip Maksimum Pontryagin dengan control optimal yang digunakan yaitu vaksinasi dan pengobatan. Tujuan dari penelitian ini untuk meminimalisir jumlah individu yang terinfeksi serta biaya yang terkait dengan control. Untuk tujuan ini, strategi control optimal yang digunakan sesuai dengan penyebab penyakit HBV ini. Tujuan kami adalah menemukan strategi pencegahan infeksi penyakit hepatitis B. Analisis efisiensi juga dibentuk untuk mengamati pengendalian yang efektif pada kedua strategi control tersebut. Model ini diselidiki secara analitis dan simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis model tersebut. Hasil analisis menunjukkan bahwa vaksinasi dan pengobatan bisa menjadi cara yang efektif untuk mengurangi penyakit hepatitis B.

**Kata kunci:** Hepatitis B, Kontrol optimal, Prinsip minimum Pontryagin, Runge Kutta Orde 4, Metode Forward-Backward sweep

### 1 PENDAHULUAN

Ada berbagai macam penyakit menular mematikan yang mempengaruhi kehidupan masyarakat di seluruh dunia, termasuk penyakit hepatitis B. Hepatitis B merupakan infeksi yang disebabkan oleh virus hepatitis B (HBV) yang merusak hati dan dapat menyebabkan infeksi akut dan kronis. Secara epidemiologi penyakit ini tersebar diseluruh dunia dan diperkirakan dua miliar orang terinfeksi virus hepatitis B, 240 juta orang secara kronis terinfeksi virus hepatitis B dan 780.000 orang meninggal setiap tahun karena virus hepatitis B setiap tahun terinfeksi virus hepatitis B, 650.000 dari sirosis hati dan kanker hati akibat virus hepatitis B kronis dan 130.000 dari hepatitis B akut (Side et al., 2020).

Indonesia menduduki peringkat ke-3 jumlah penderita hepatitis B di dunia, dengan jumlah penderita sekitar 13 juta penduduk. Indonesia termasuk Negara yang dihimbau oleh WHO untuk melaksanakan upaya pencegahan. Selain itu, di Indonesia infeksi virus hepatitis B terjadi pada bayi dan anak yang terinfeksi perinatal. Bila bayi terinfeksi pada usia 1-5 tahun maka akan terjadi penyakit hati yang kronis. Infeksi yang berjalan kronis mempunyai kemungkinan untuk menjadi sirosis hepatitis dan kanker hati. Mereka yang menderita infeksi kronis ini merupakan sumber untuk penularan penyakit hepatitis B (Side et al., 2020).

Meskipun banyak penderita hepatitis B tidak mengalami gejala pada tahap awal infeksi, terdapat beberapa orang yang menunjukkan gejala seperti muntah, kulit menguning, kelelahan, urin berwarna hitam, dan sakit perut (Khan et al., 2020),(Wodajo et al., 2023). Hepatitis B biasanya ditularkan dari orang ke orang melalui hubungan seksual, transmisi perinatal, transfuse darah yang virus hepatitis B, cairan tubuh, dan peralatan yang mengandung cairan tubuh penderita yang terkontaminasi hepatitis B. Salah satu langkah pencegahan penyakit HBV ialah vaksinasi. Ada tiga tahap vaksinasi di Indonesia dan jika individu telah mendapatkan tiga kali vaksin tersebut serta individu yang telah sembuh dari Hepatitis B memiliki probabilitas sangat kecil untuk kembali tertular penyakit (Kemenkes, 2023). Selain itu pengobatan dan pengelolaan yang tepat pada penyakit HBV dapat meminimalisir terjadinya infeksi kronis. Rata-rata pengidap infeksi kronis dikisaran usia 36-55 tahun. Estimasi perawatan kisaran 1 sampai 28 hari, kondisi setelah perawatan sebagian membaik dengan persentasi 69% dan yang meninggal dengan persentasi 24% (Zada et al., 2021).

Dinamika perubahan populasi merupakan salah satu yang diteliti dalam pemodelan matematis yang melakukan pendeskripsian fenomena dalam sudut pandang matematika. Dengan asumsi bahwa penyakit hepatitis B dapat menyebar satu sama lain, dinamika penyebaran penyakit hepatitis B dapat dipertimbangkan dalam pemodelan matematis. Beberapa penelitian sebelumnya memodelkan masalah yang berkaitan dengan dinamika penyebaran penyakit hepatitis B. Seperti contoh model matematika penyebaran penyakit hepatitis B yang dikembangkan pada tahun 2020 (Khan et al., 2020), yang membahas tentang penyakit hepatitis yang terbagi dua yaitu HBV akut dan HBV kronis dengan model *SEACTR* (*Susceptible, Expose, Infected Acute, , Infected Acute, Treatment, Removed*) dan pada tahun 2022 (Side et al., 2020) yang membahas tentang penyebaran penyakit hepatitis B dengan model matematika *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*). Oleh sebab itu, pada penelitian yang disebutkan sebelumnya akan dilakukan modifikasi model dengan topik yang sama dari peneliti sebelumnya dalam sudut pandang matematika. Peneliti akan modifikasi dengan mengembangkan model penyakit hepatitis B menurut Side, dkk (Side et al., 2020) dengan menambahkan kelas populasi *Treatment (T)* dan beberapa control optimal untuk meminimalisir terjadinya penyebaran penyakit hepatitis B. Peneliti akan mengkaji dinamika penyebaran penyakit hepatitis B dengan control optimal.

## **2 METODE**

Metode membahas mengenai tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian.

### **2.1 Identifikasi Masalah**

Identifikasi masalah dilakukan untuk menetapkan fokus permasalahan penelitian yang berkaitan dengan kontrol optimal pada penyebaran penyakit hepatitis B.

### **2.2 Studi Literatur**

Studi literatur dilakukan terhadap jurnal penelitian yang telah dilakukan dan sumber pendukung lainnya untuk mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan model penyebaran penyakit

hepatitis B, serta tindakan kontrol yang dapat dilakukan untuk memberantas penyakit tersebut dalam suatu populasi.

### **2.3 Formulasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Hepatitis B**

Setelah dilakukan studi literatur, kemudian dilanjutkan dengan penyusunan masalah dan mengkonstruksi model penyebaran penyakit hepatitis B menggunakan empat kompartemen yaitu *susceptibles (S)*, *infected (I)*, *treatment (T)*, dan *recovered (R)*. Dengan pemberian vaksinasi, dan pengobatan.

### **2.4 Formulasi Model Kontrol Optimal**

Masalah optimasi yang akan diselesaikan dituliskan dalam bentuk fungsi tujuan yaitu meminimumkan jumlah *infected (I)*, dan biaya kontrol  $u_1$  dan  $u_2$ .

### **2.5 Prinsip Minimum Pontryagin**

Pada tahap ini akan didapatkan bentuk pengontrol yang optimal dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin. Dengan membentuk fungsi Hamilton kemudian menentukan syarat keoptimalan (kondisi stasioner), persamaan state dan persamaan costate dengan kondisi transversal.

### **2.6 Simulasi Numerik**

Simulasi numerik untuk masalah kontrol optimal dilakukan dengan menggunakan bantuan software Matlab R2018a.

### **2.7 Penarikan Kesimpulan**

Setelah menganalisis dan melakukan simulasi numerik terhadap model maka selanjutnya diambil suatu kesimpulan terhadap hasil-hasil yang diperoleh.

## **3 HASIL DAN PEMBAHASAN**

### **3.1 Model Dinamika Penyebaran Penyakit Hepatitis B**

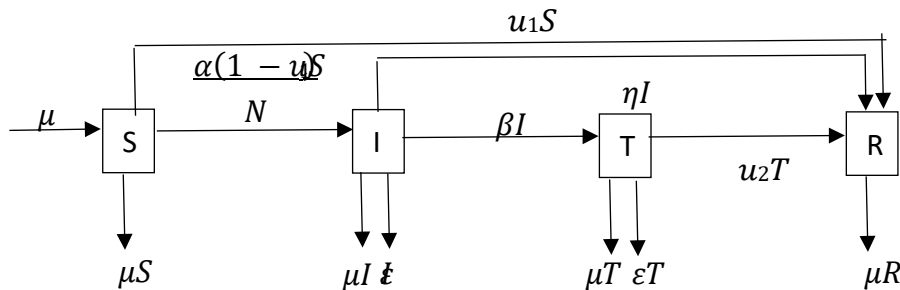
Pengembangan model dalam penelitian ini merupakan pengembangan dari model dinamika penyebaran penyakit hepatitis B menurut (Side et al., 2020), kemudian diselesaikan dengan teori control optimal. Hasil pengembangan model diperoleh adalah 4 kelas populasi yaitu *Susceptible(S)*, *Infected(I)*, *Treatment (T)*, dan *Recovered (R)*. Pengembangan model dilakukan dengan menambahkan kelas *Treatment (T)* dan beberapa factor dalam upaya mengatasi masalah penyebaran penyakit hepatitis B.

Adapun asumsi yang dibentuk sebagai berikut:

1. Populasi tertutup dan jumlah populasi konstan.
2. Laju kelahiran dan kematian sama.
3. Setiap kelas populasi mengalami kematian alami  $\mu$  dan hanya kelas populasi terinfeksi dan pengobatan saja yang mengalami kematian yang diakibatkan oleh penyakit hepatitis B dengan laju  $\varepsilon$ .

4. Individu rentan yang beresiko terpapar virus hepatitis B dengan laju konstan sebesar  $\mu$ . Individu rentan melakukan interaksi terhadap individu yang terinfeksi hepatitis B dari beberapa factor sehingga berpindah ke kelas terinfeksi dengan laju  $\frac{\alpha(1-u_1)S}{N}$ .
5. Individu pada kelas terinfeksi bertambah karena adanya interaksi antara yang rentan terinfeksi dengan individu yang terinfeksi hepatitis B dengan laju  $\frac{\alpha(1-u_1)S}{N}$ . Individu yang terinfeksi berkurang karena adanya keinginan untuk berobat, sehingga berpindah ke kelas *treatment* dengan laju  $\beta I$ . Selain itu, terdapat individu yang memiliki imun yang kuat sehingga dapat mengalami kesembuhan secara spontan dengan laju  $\eta I$ .
6. Individu pada kelas *treatment* bertambah karena adanya pengobatan dengan laju  $\beta I$ . Individu kelas *treatment* mengalami pengurangan karena yang mendapatkan pengobatan karena mengalami kesembuhan setelah melakukan *treatment* dengan laju  $u_2 T$ .
7. Individu pada kelas *recovered* bertambah karena adanya laju kesembuhan spontan dari individu yang terinfeksi dengan laju  $\eta I$ , adanya proporsi populasi yang divaksinasi dari kelas rentan dengan laju  $u_1 S$ , dan adanya proporsi yang diberikan pengobatan dari kelas *treatment* dengan laju  $u_2 T$ .

Diagram skematik dari empat kelas populasi dalam model dengan aumsi-asumsi di atas diberikan sebagai berikut:



**Gambar 2.1** Diagram Kompartemen Model Matematika Dinamika Penyebaran Penyakit Hepatitis B

Dari diagram kompartemen model tersebut, didapatkan system persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu - \frac{(1-u_1)\alpha S}{N} - u_1 S - \mu S \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{(1-u_1)\alpha S}{N} - \beta I - \eta I - \epsilon I - \mu I \\
 \frac{dT}{dt} &= \beta I - u_2 T - \epsilon T - \mu T \\
 \frac{dR}{dt} &= \eta I + u_1 S + u_2 T - \mu R
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Dengan total populasi:

$$N = S + I + T + R.$$

Diasumsikan kondisi awal system memenuhi :

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, T(0) = T_0, R(0) = R_0,$$

Dengan  $S_0, I_0, T_0, R_0 \geq 0$ .

Keterangan variable dan parameter yang digunakan dijelaskan pada table berikut.

**Tabel 2.1** Daftar Variabel dan Parameter Model Dinamika Penyebaran Penyakit Hepatitis B

No.	Parameter	Keterangan
1.	$\mu$	Laju kelahiran/kematian secara alami
2.	$\alpha$	Tingkat penularan infeksi hepatitis B ( $I$ ) terhadap yang rentan ( $S$ )
3.	$\varepsilon$	Tingkat kematian karena penyakit
4.	$\beta$	Laju pengobatan
5.	$\eta$	Kesembuhan secara spontan
6.	$u_1$	Proporsi populasi rentan ( $S$ ) yang divaksinasi
7.	$u_2$	Proporsi populasi <i>treatment</i> ( $T$ ) yang melakukan pengobatan

### 3.2 Masalah Kontrol Optimal

Pada penelitian ini permasalahan akan diselesaikan menggunakan control optimal dengan tujuan untuk meminimumkan jumlah individu penyebaran penyakit hepatitis B dengan biaya penerapan control  $u_1$  dan  $u_2$  yang minimum. Fungsi tujuan yang akan diminimumkan didefinisikan sebagai berikut :

$$\min_{(u_1, u_2)} J = \min_{(u_1, u_2)} \int_{t_0}^{t_f} [A_1 I(t) + \frac{A_2}{2} u_1^2(t) + \frac{A_3}{2} u_2^2(t)] dt \quad (2.2)$$

dimana batas control optimal berada pada  $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq t_f$  serta  $t_f$  merupakan waktu akhir pengontrolan. Koefisien  $A_1$  merupakan nilai bobot tujuan untuk mengurangi jumlah individu terinfeksi hepatitis B, koefisien  $A_2$  merupakan nilai bobot dari fungsi control  $u_1$  yaitu upaya pemberian vaksinasi, dan koefisien  $A_3$  merupakan nilai bobot tujuan dari fungsi control  $u_2$  yaitu upaya pengobatan dengan melalui treatment. Merepresentasikan persamaan (2.2) pencarian fungsi control  $(u_1^*, u_2^*) \in U$  sedemikian sehingga  $J(u_1^*, u_2^*) \leq J(u_1, u_2)$  untuk setiap  $(u_1, u_2) \in U$ .

### 3.3 Pembentukan Persamaan State, Costate, dan Syarat Kestasioneran

Pada persamaan (2.2) diberikan masalah optimasi, kemudian akan ditentukan control optimal  $u^*$  yang memenuhi  $J(u^*) = \min \{J(u) : u \in U\}$ . Berdasarkan prinsip minimum Pontryagin Langkah pertama membentuk fungsi Hamilton terlebih dahulu untuk menyelesaikan fungsi tujuan pada persamaan (2.2) dengan kendala pada persamaan (2.2) dengan kendala (2.1). Dari persamaan (2.2) diperoleh :

$$f(t, x, u) = A_1 I(t) + \frac{A_2}{2} u_1^2(t) + \frac{A_3}{2} u_2^2(t)$$

Misalkan pengali Lagrange dari persamaan (2.1) yaitu  $\lambda$  dan  $\lambda^T$  adalah transpose dari  $\lambda$  sehingga dapat dituliskan

$$\lambda^T = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4)$$

Maka fungsi Hamilton dapat diuraikan seperti berikut:

$$\begin{aligned} P(t, x, u, \lambda) &= f(t, x, u) + \lambda^T(t)g(t, x, u) \\ &= A_1 I + \frac{A_2}{2} u^2 + \frac{A_3}{2} u^2 \\ &\quad + \lambda_1 \left( \mu - \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{S+I+T+R} - u_1(t)S - \mu S \right) \\ &\quad + \lambda_2 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{S+I+T+R} - \beta I - \eta I - \varepsilon I - \mu I \right) \\ &\quad + \lambda_3 (\beta I - u_2(t)T - \varepsilon T - \mu T) \\ &\quad + \lambda_4 (\eta I + u_1(t)S + u_2(t)T - \mu R). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dari persamaan (2.3) akan ditentukan persamaan state, costate, dan syarat stasioner sebagai berikut:

- Persamaan state :  $\dot{x} = \frac{\partial P}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial P}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial P}{\partial \lambda_3}, \frac{\partial P}{\partial \lambda_4} \right)^T$

diperoleh

$$S = \frac{\partial P}{\partial \lambda_1} = \mu - \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{S+I+T+R} - u_1(t)S - \mu S$$

$$I = \frac{\partial P}{\partial \lambda_2} = \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{S+I+T+R} - \beta I - \eta I - \varepsilon I - \mu I$$

$$T = \frac{\partial P}{\partial \lambda_3} = \beta I - u_2(t)T - \varepsilon T - \mu T$$

$$R = \frac{\partial P}{\partial \lambda_4} = \eta I + u_1(t)S + u_2(t)T - \mu R.$$

- Persamaan costate

$$\lambda = -\frac{\partial P}{\partial \lambda} = \left( -\frac{\partial P}{\partial S}, -\frac{\partial P}{\partial I}, -\frac{\partial P}{\partial T}, -\frac{\partial P}{\partial R} \right)^T$$

diperoleh

$$\lambda = -\frac{\partial P}{\partial I} = \lambda_1 - \lambda_2 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha}{S+I+T+R} \right) + \lambda_2 - \lambda_1 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{(S+I+T+R)^2} \right) + \lambda_4 - \lambda_1 u_1(t) + \lambda_1 \mu$$

$$\lambda = -\frac{\partial P}{\partial I} = \lambda_1 - \lambda_2 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha}{S+I+T+R} \right) + \lambda_2 - \lambda_1 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{(S+I+T+R)^2} \right) + \lambda_4 - \lambda_1 u_1(t) + \lambda_1 \mu$$

$$\lambda = -\frac{\partial P}{\partial R} = \lambda_1 - \lambda_2 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{(S+I+T+R)^2} \right) + \lambda_4 - \lambda_1 u_1(t) + \lambda_1 (\varepsilon + \mu)$$

$$\lambda = -\frac{\partial P}{\partial R} = \lambda_1 - \lambda_2 \left( \frac{(1-u_1(t))\alpha S}{(S+I+T+R)^2} \right) + \lambda_4 \mu$$

- Syarat stasioner

Bentuk  $u_1$  dan  $u_2$  yang optimal diperoleh dengan menggunakan syarat stasioner diberikan oleh:

$$\lambda = \frac{\partial P}{\partial u} = \left( \frac{\partial P}{\partial u_1}, \frac{\partial P}{\partial u_2} \right)^T = 0$$

dari syarat stasioner diperoleh :

$$u_1 = \frac{1}{A_2} \left( (\lambda_1 - \lambda_2) \left( \frac{\alpha S}{N} \right) + (\lambda_4 - \lambda_1) S \right),$$

$$u_2 = \frac{1}{A_3} \left( (\lambda_4 - \lambda_3) T \right),$$

Berdasarkan syarat batas untuk  $u$  yang telah diberikan sebelumnya yaitu  $0 \leq u_1 \leq u_a \leq 1$  dan  $0 \leq u_2 \leq u_b \leq 1$ , diperoleh control optimal  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  yang ditulis sebagai berikut:

1. Untuk control  $u_1(t)$ :

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & , \text{jika } u_1 \leq 0 \\ u_1 & , \text{jika } 0 \leq u_1 \leq 1 \\ 1 & , \text{jika } u_1 \geq 1 \end{cases}$$

atau dengan kata lain:

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{A_2} \left( (\lambda_1 - \lambda_2) \left( \frac{\alpha S}{N} \right) + (\lambda_4 - \lambda_1) S \right) \right\} \right\}$$

2. Untuk control  $u_2(t)$ :

$$u_2^* = \begin{cases} 0 & , \text{jika } u_2 \leq 0 \\ u_2 & , \text{jika } 0 \leq u_2 \leq 1 \\ 1 & , \text{jika } u_2 \geq 1 \end{cases}$$

atau dengan kata lain:

$$u^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{A_3} ((\lambda_4 - \lambda_3) T) \right\} \right\}.$$

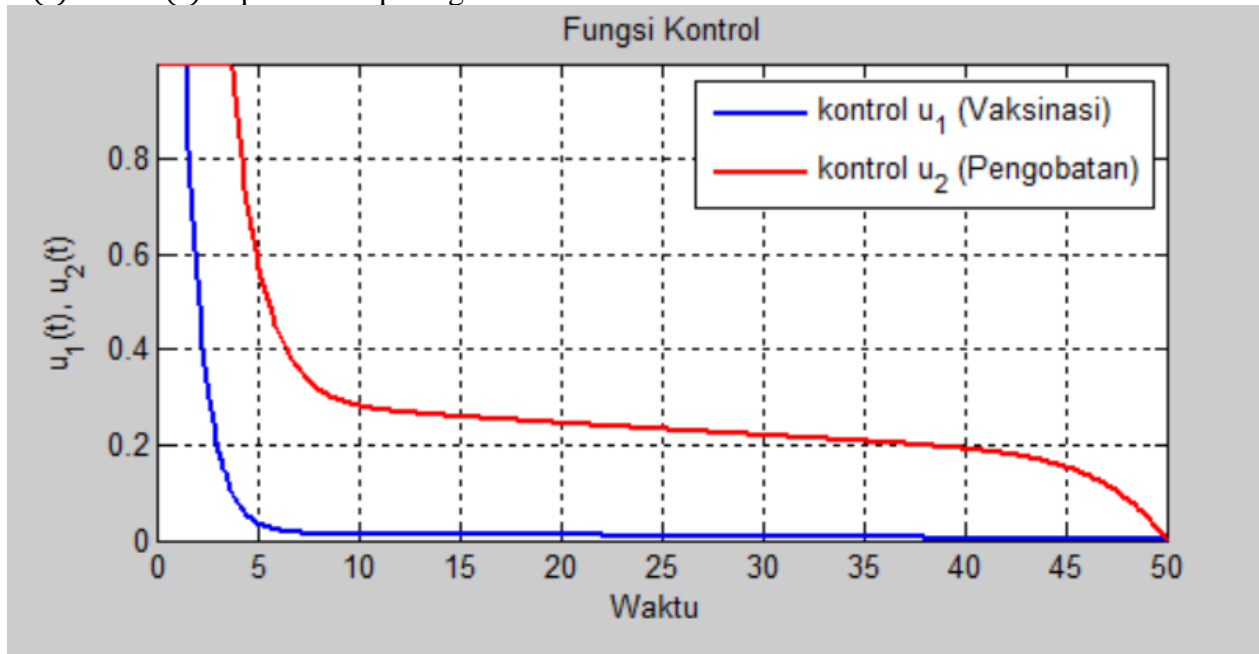
### 3.4 Simulasi Numerik

Penyakit hepatitis B tetap menjadi ancaman bagi masyarakat negara maju dan berkembang. Pada bagian ini, diberikan simulasi dengan control dengan nilai parameter  $\mu = 0.002$ ,  $\alpha = 0.4286$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\varepsilon = 0.0025$ , dan  $\eta = 0.0825$  dan nilai masing-masing populasi adalah  $S(0) = 5350$ ,  $I(0) = 1650$ ,  $T(0) = 1070$ , dan  $R(0) = 8025$ , nilai bobot yang digunakan  $A_1 = 35$ ,  $A_2 = 50$ , dan  $A_3 = 30$ . Metode numerik yang digunakan adalah metode *forward-backward sweep*. Interval waktu  $[t_0, t_f]$  yaitu  $t_0 = 0$  dan waktu akhir  $t_f = 50$  tahun, begitu pula dengan fungsi control  $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$  dengan  $u_{ij} \approx u_i(b_j)$ ,  $i = 1, 2$  dan  $j = 1, \dots, n$ . Solusi  $x(t)$  dan  $\lambda(t)$  dicari dengan menggunakan metode *forward-backward* Runge-Kutta

orde 4. Sedangkan nilai  $u$  diperbaharui dari setiap iterasi menggunakan  $u = \frac{u_{lama} + u_{baru}}{2}$ ,

dengan  $u_{baru}$  diperoleh dari syarat keoptimalan  $\frac{\partial P}{\partial u}$  (Anggriani et al., 2021).

Pada pemaparan sebelumnya, telah dijelaskan bahwa terdapat dua macam control dalam model penyebaran penyakit hepatitis B ini, yaitu control  $u_1(t)$  merupakan upaya vaksinasi dan control  $u_2(t)$  merupakan upaya pengobatan. Adapun bentuk grafik yang optimal dari  $u_1(t)$  dan  $u_2(t)$  dapat dilihat pada gambar berikut.



**Gambar 2.2** Grafik Perbandingan Fungsi Kontrol Optimal  $u_1^*(t)$  dan  $u_2^*(t)$



Pada Gambar 2.2, terlihat bahwa pada awal waktu sampai waktu  $t = 2$  tahun, nilai  $u_1^*(t)$  dan  $u_2^*(t)$  memiliki nilai konstan yang bernilai 1. Hal ini menunjukkan vaksinasi dan pengobatan perlu dilakukan secara maksimal secara bersamaan di awal waktu sampai dan  $t = 3$  tahun. Dari gambar tersebut juga dapat dilihat adanya kondisi nilai  $u_1^*(t)$  dan  $u_2^*(t)$  terus mengalami penurunan seiring dengan berjalannya waktu, dimana kondisi nilai  $u_1^*(t)$  mengalami penurunan pada saat  $t = 2$  tahun, dibandingkan dengan nilai  $u_2^*(t)$  yang mengalami penurunan saat  $t = 4$  tahun. Penurunan nilai  $u_1^*(t)$  lebih awal dibandingkan dengan  $u_2^*(t)$  disebabkan bobot biaya untuk upaya vaksinasi ( $u_1^*(t)$ )<sup>1</sup> lebih besar dibandingkan dengan pengobatan ( $u_2^*(t)$ ). Penurunan dari grafik  $u_1^*(t)$  dan  $u_2^*(t)$  juga menunjukkan bahwa saat kondisi individu yang terinfeksi hepatitis B sudah mulai berkurang, maka upaya vaksinasi dan pengobatan harus pula dikurangi.

#### 4 KESIMPULAN

Model matematika dinamika penyebaran penyakit hepatitis B, terdiri dari kelas yang rentan terhadap penyakit infeksi hepatitis B atau *Susceptible (S)*, kelas terinfeksi hepatitis B atau *Infected(I)*, kelas pengobatan terhadap penyakit hepatitis B atau *Treatment (T)*, dan kelas yang telah sembuh dari penyakit atau *Recovered (R)* dengan control optimal berupa vaksinasi dan pengobatan. Model ini terdiri dari dua control sebagai berikut :

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{A_2} \left( (\lambda_4 - \lambda_1) \left( \frac{\alpha S}{N} \right) + \lambda_1 \right) \right\} \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{A_3} \left( (\lambda_4 - \lambda_3) T \right) \right\} \right\}.$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik menunjukkan hasil efek control optimal vaksinasi lebih cepat menurunkan penyakit hepatitis B dibandingkan control pengobatan. Dari penjelasan tersebut menunjukkan bahwa dalam jangka panjang untuk pencegahan penyakit hepatitis B perlu diterapkan vaksinasi agar dapat mencegah penyakit hepatitis B bertambah dan pengobatan agar individu yang telah terkena penyakit hepatitis B dapat sembuh.

#### UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada beberapa pihak yang telah banyak memberikan kritikan, saran, dan motivasi kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini. Penulis sampaikan terima kasih kepada beberapa pihak yang membimbing kepada penulis, serta tidak lupa teman-teman kerabat yang telah memberikan motivasi dan dukungannya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anggriani, N., Toaha, S., & Kasbawati, K. (2021). Optimal Control of Mathematical Models on The Dynamics Spread of Drug Abuse. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, 17(3), 339–348. <https://doi.org/10.20956/j.v17i3.12467>
- Khan, M. A., Shah, S. A. A., Ullah, S., Okosun, K. O., & Farooq, M. (2020). OPTIMAL CONTROL ANALYSIS of the EFFECT of TREATMENT, ISOLATION and VACCINATION on HEPATITIS B VIRUS. *Journal of Biological Systems*, 28(2), 351–376. <https://doi.org/10.1142/S0218339020400057>
- Side, S., Wahyuni, M. S., & Rifki, M. (2020). Solusi Numerik Model SIR pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B dengan Metode Perturbasi Homotopi di Provinsi Sulawesi Selatan. *Journal of Mathematics Computations and Statistics*, 3(2), 79. <https://doi.org/10.35580/jmathcos.v3i2.20122>
- Wodajo, F. A., Gebru, D. M., & Alemneh, H. T. (2023). Mathematical model analysis of effective intervention strategies on transmission dynamics of hepatitis B virus. *Scientific Reports*, 13(1), 1–21. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-35815-z>
- Zada, I., Naeem Jan, M., Ali, N., Alrowail, D., Soopy Nisar, K., & Zaman, G. (2021). Mathematical analysis of hepatitis B epidemic model with optimal control. *Advances in Difference Equations*, 2021(1). <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03607-2>
- Kementerian Kesehatan RI. (2023). Sehat Negeriku Sehat Bangsa. Pusat Data dan Informasi. <https://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/rilis-media/20230726/4343580/hepatitis-b-banyak-ditularkan-dari-ibu-ke-anak/> (di akses 26/6/2024).