Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi Seri III
Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Terbuka
Vol. 2 No. 1 (2025)
e-ISSN: 3047-6569

PEMBENTUKAN POLINOMIAL BERDERAJAT GENAP DENGAN AKAR-AKAR BILANGAN KOMPLEKS

Yusuf Ilham Ramadhan[1*], Tri Wijayanti Septiarini[2]
[1,2]*Program Studi Matematika FST, Universitas Terbuka, Tangerang Selatan, Banten*

**Penulis korespondensi*: *einzweig2000@gmail.com*

ABSTRAK

Bilangan kompleks merupakan elemen kunci dalam matematika yang memungkinkan penyelesaian semua persamaan polinomial, baik yang memiliki solusi bilangan real maupun bilangan kompleks. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode pembentukan polinomial berderajat genap dengan akar-akar bilangan kompleks. Dengan memanfaatkan sifat konjugat dari bilangan kompleks, penelitian membuktikan bahwa setiap polinomial berderajat genap dengan koefisien real memerlukan pasangan akar konjugat bilangan kompleks untuk menghilangkan bagian imajiner, sehingga menghasilkan polinomial berkoefisien real. Hasil penelitian menunjukkan bahwa polinomial berderajat genap dapat memiliki kombinasi akar-akar real dan kompleks yang bergantung pada struktur koefisiennya. Selain itu, penelitian ini memperluas teori pembentukan polinomial dari derajat dua (fungsi kuadrat) menjadi derajat genap yang lebih tinggi. Temuan ini memberikan kontribusi signifikan terhadap pengembangan teori aljabar, terutama terkait dengan bilangan kompleks, yang relevan untuk berbagai aplikasi matematika. Penelitian lanjutan diharapkan dapat mengeksplorasi pembentukan polinomial dengan derajat ganjil atau polinomial dengan koefisien bilangan kompleks, serta dapat memberikan contoh aplikasi konkret yang lebih rinci untuk mendukung penggunaannya, baik untuk penggunaan praktis maupun teoritis.

Kata kunci: Bilangan kompleks, polinomial berderajat genap, sifat konjugat.

1. PENDAHULUAN

Bilangan kompleks adalah sebuah elemen dalam perluasan sistem bilangan real dengan elemen tertentu yang dinotasikan dengan i, yang disebut sebagai elemen imajiner yang memenuhi persamaan $i^2 = -1$. Bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk $a + bi$ dimana a, b adalah bilangan real (Aryasatya, F., Luthfiyah, K., & Rosalinda, O., 2024). Bilangan kompleks ditemukan oleh Gerolamo Cardano pada abad ke-16 saat meneliti tentang pemecahan persamaan kubik. Pada abad ke-18, Leonhard Euler menggunakan bilangan kompleks secara umum dan menghasilkan solusi-solusi persamaan diferensial (Meilinda, C., Ahkmar, F. A., Sihombing, K. M., & Situmorang, S. A., 2023). Bilangan kompleks memungkinkan solusi bagi semua persamaan polinomial, walaupun polinomial tersebut tidak memiliki solusi dalam bilangan real. Tepatnya, teorema dasar aljabar menyatakan bahwa setiap persamaan polinomial non-konstan dengan koefisien real atau kompleks mempunyai solusi berupa bilangan kompleks (Britannica, 2022).

Menurut Sukardi (2022), polinomial atau suku banyak adalah salah satu materi matematika tingkat SMA yang merupakan bagian besar dari lingkup aljabar. Polinomial adalah ekspresi aljabar yang berbentuk $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ untuk n bilangan cacah, dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sebagai koefisien masing-masing variabel serta a_0 suatu konstanta dengan syarat $a_0 \neq 0$.

Perihal yang melatarbelakangi penelitian ini adalah sebuah dialog yang terjadi antara peneliti dengan beberapa guru dan siswa yang mengeluhkan bahwa pembuatan soal-soal ujian, terutama pada bagian persamaan kuadrat, persamaan kubik, dan polinomial, terlihat sebuah pola yang dapat memudahkan siswa dalam menebak jawaban yang dipertanyakan oleh soal tersebut. Peneliti kemudian mencari jawaban dari keluhan tersebut pada sistem bilangan kompleks.

Sebelumnya, peneliti telah menemukan beberapa artikel dan karya ilmiah yang membahas cara pembuatan polinomial dengan akar-akar bilangan kompleks. Namun, artikel dan karya ilmiah tersebut terbatas pada polinomial dengan derajat dua atau fungsi kuadrat (Harahap, 2016). Pada penelitian ini, peneliti berharap untuk memperluas penggunaan bilangan kompleks sebagai akar-akar dari polinomial berderajat genap.

2. METODE

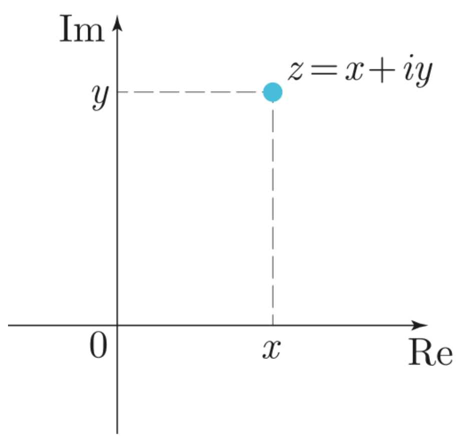
2.1. Bilangan Kompleks

Menurut Purwosetiyono (2015), bilangan kompleks z yang dinotasikan dengan $z = x + yi$ merupakan penggabungan dari bilangan real x, y dan bilangan imajiner i yang memenuhi sifat $i^2 = -1$. Bilangan kompleks digambarkan pada bidang dua dimensi yang disebut dengan bidang kompleks (bidang Argand). Bidang kompleks terdiri dari dua bagian, yaitu bagian real x dan bagian imajiner yi. Penulisan bilangan kompleks z apabila dinyatakan pada bidang kompleks ditulis dengan $z = (x, y)$. Oleh karena itu, bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan

$$z = (x, y) = x + yi$$

Karena x merupakan bagian real dari z dan y merupakan bagian imajiner dari z, maka x, y dapat dinotasikan dengan $x = Re(z)$ dan $y = Im(z)$. Oleh karenanya, penulisan notasi z dapat ditulis juga sebagai

$$z = x + yi$$
$$z = Re(z) + Im(z)$$



Gambar 1. Koordinat pada Bidang Kompleks

Bilangan kompleks juga dapat diberlakukan operasi-operasi aljabar seperti operasi-operasi aljabar pada bilangan real. Misalkan terdapat dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka:

- Penjumlahan : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Pengurangan : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- Perkalian : $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- Pembagian : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}, z_2 \neq 0$

Pada operasi-operasi aljabar diatas, berlaku sifat-sifat:

- Komutatif

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$

- Asosiatif

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

- Distributif

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

- Terdapat elemen nol pada penjumlahan ($0 = 0 + 0i$)

$z + 0 = 0 + z = z$

- Terdapat elemen skalar 1 pada perkalian ($1 = 1 + 0i$)

$z \times 1 = 1 \times z = z$

Bilangan kompleks dapat disajikan sebagai vektor pada bidang kompleks dengan mengembangkan konsep nilai mutlak (modulus) bilangan real pada bilangan kompleks. Nilai mutlak $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan real non negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan ditulis sebagai

$$\text{Modulus } z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Secara geometri, $|z|$ menyatakan jarak antara titik (x, y) dengan titik asal. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$. Jarak antara z_1 dan z_2 didefinisikan dengan :

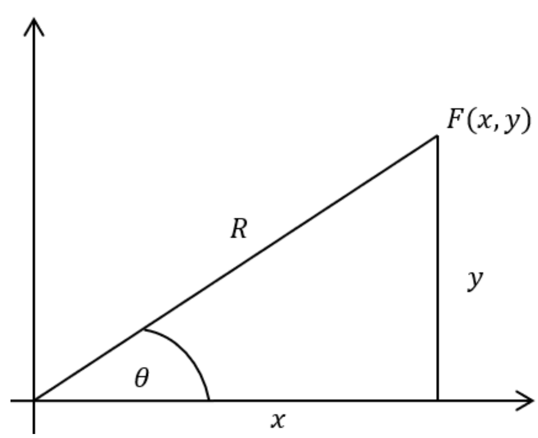
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Bilangan kompleks juga dapat disajikan dalam bentuk polar. Misalkan F adalah suatu titik di bidang kompleks yang dikaitkan dengan bilangan kompleks $x + iy$, maka dapat diperoleh sebagai berikut.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sehingga bentuk $z = x + iy$ menjadi:

$$z = x + iy$$
$$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z = r\ cis\ \theta$$



Gambar 2. Visualisasi Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Selain bentuk umum $z = x + iy$ dan bentuk polar $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, bilangan kompleks z juga dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen $z = re^{i\theta}$. Bentuk eksponen ini juga disebut dengan rumus Euler. Pada rumus Euler, dapat dilakukan operasi-operasi sebagai berikut.

Misalkan $z_1 = r_1\, e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$

- Perkalian

$z_1 z_2 = r_1\, r_2\, e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} = r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

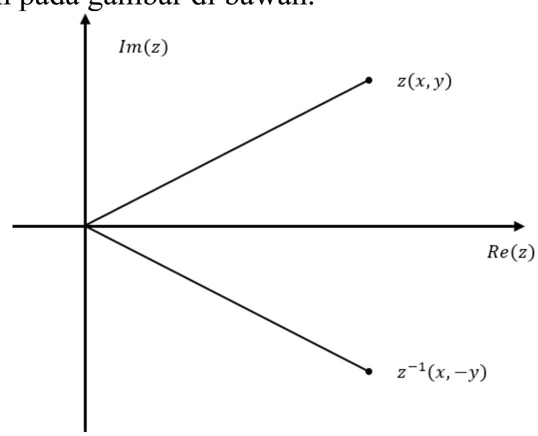
- Pembagian

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

- Invers sembarang bilangan kompleks $z = re^{i\theta}$ yaitu

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

Bilangan kompleks memiliki sifat sekawan. Misal terdapat sebuah titik pada bidang kompleks yaitu $z = x + iy$. Maka, apabila titik z dicerminkan terhadap sumbu $Re(z)$, terdapat titik $z^{-1} = x - iy$ seperti diilustrasikan pada gambar di bawah.



Gambar 3. Visualisasi Pencerminan Titik z terhadap Sumbu $Re(z)$

Titik $z^{-1} = x - iy$ disebut dengan titik sekawan atau konjugat dan dinyatakan dengan pernyataan berikut.

“Apabila terdapat suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$, maka terdapat bilangan kompleks $z^{-1} = x - iy$ yang didefinisikan sebagai konjugat dari suatu bilangan kompleks."

Bilangan kompleks memiliki aplikasi dalam berbagai bidang yang secara langsung maupun tidak langsung berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Pengaplikasian ini diantaranya pada dinamika fluida, pemrosesan sinyal, dan pada perhitungan rangkaian listrik RLC.

2.2. Polinomial

Polinomial atau suku banyak adalah suatu ekspresi matematika yang terdiri dari sejumlah suku yang masing-masing merupakan hasil kali antara konstanta dengan variabel berpangkat dengan pangkat bulat non-negatif (Kurniawan, 2024). Polinomial memiliki bentuk umum

$$y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_n \neq 0$$

$P_n(x)$ disebut polinom berderajat n dengan $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ himpunan bilangan asli.

Polinomial yang sering dijumpai memiliki bentuk:

- linear, yaitu polinomial dengan derajat satu yang dinotasikan dengan

$P_1(x) = a_1x + a_0$ atau $y = ax + b$.

- kuadratik, yaitu polinomial dengan derajat dua yang dinotasikan dengan

$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ atau $y = ax^2 + bx + c$.

- kubik, yaitu polinomial dengan derajat tiga yang dinotasikan dengan

$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ atau $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut Harahap (2016), untuk membuat sebuah polinomial berderajat dua (fungsi kuadrat) dengan menggunakan akar-akar kompleks, dipergunakan

Teorema 1

Misal $f(x) = ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, dan x_1, x_2 adalah akar-akar dari $f(x)$, dengan $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, maka

(i) $x_1 \neq x_2$

(ii) $x_2 = \overline{x_1}$ (Sifat konjugat bilangan kompleks)

Untuk membuat sebuah polinomial berderajat genap dengan akar-akar bilangan kompleks, diperlukan perluasan dengan teorema kedua berikut.

Teorema 2

Misal $P(x) = a_nx^n + a_{(n-1)}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{R}$ dengan akar-akar kompleks $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ dan n bilangan genap positif, maka untuk setiap polinomial berderajat n,

(i) Terdapat $0 < y < \frac{n}{2}$pasangan akar-akar kompleks yang bersifat sekawan/konjugat,$y \in \mathbb{N}^+$

(ii) Terdapat $(n - 2y)$ banyak akar-akar bilangan real.

Bukti. Misal $P(x)$ adalah fungsi polinomial berderajat n dengan koefisien real yang dinotasikan dengan $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{R}$. Misal $z = c + id$ adalah salah satu akar dari $P(x)$,maka

$$P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$$
$$P(z) = a_n(c + id)^n + a_{n-1}(c + id)^{n-1} + \cdots + a_1(c + id) + a_0 = 0$$

$P(z)$ memiliki koefisien bilangan kompleks sehingga z sendiri bukanlah akar dari suatu polinomial yang berkoefisien real. Hal ini dikarenakan masih terdapat bagian imajiner (i) dalam polinomial tersebut. Situasi ini dapat diatasi menggunakan sifat konjugat atau sifat sekawan dari bilangan kompleks. Hal ini dapat dilihat pada inferensi berikut.

Inferensi 1

Misal $z = c + id$ dan $\bar{z} = c - id$ masing-masing adalah pasangan akar-akar dari sebuah persamaan kuadrat, maka

$$(x - z)(x - \bar{z}) = 0$$
$$\big(x - (c + id)\big)\big(x - (c - id)\big) = 0$$
$$x^2 - 2cx + idx - idx + icd - icd + c^2 - i^2d^2 = 0$$
$$x^2 - 2cx + c^2 - (-1)d^2 = 0$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + d^2 = 0$$

Dapat dilihat pada inferensi di atas bahwa penggunaan sifat sekawan/konjugat dapat meniadakan bagian imajiner (i) pada hasil akhir perhitungan sehingga koefisien dari persamaan pada inferensi 1 bernilai real. Maka dari itu, diperlukan sepasang bilangan kompleks yang bersifat konjugat untuk membuat suatu polinomial berderajat genap dengan koefisien real.
Selanjutnya akan diselidiki perihal adanya akar-akar real dan kompleks pada polinomial berderajat genap dengan koefisien real. Hal ini akan diselidiki pada inferensi berikut.

Inferensi 2
Misal diberikan polinomial berderajat empat yang dinotasikan sebagai berikut

$$P(x) = x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 100x + 68 = 0$$

Dengan mencari akar-akar dari $P(x)$, didapati bahwa $P(x)$ memiliki akar-akar
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = 4 + i,$ dan $x_4 = 4 - i.$
Pada inferensi 2, dapat diamati bahwa $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan x_3, x_4 merupakan pasangan konjugat bilangan bilangan kompleks atau $x_4 = \overline{x_3}$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa suatu polinomal berderajat genap dengan koefisien real dapat memiliki akar-akar real dan kompleks.
Berdasarkan inferensi 1 dan 2, dapat dipastikan bahwa Teorema 2 terbukti kebenarannya. Oleh karenanya, proses pembentukan polinomial berderajat genap dan berkoefisien real dengan menggunakan akar-akar kompleks memiliki dua syarat yang pasti, yaitu:
(i) pada penggunaaan suatu bilangan kompleks z sebagai akar dari suatu polinomial berderajat genap, akan terdapat pasangan konjugat $\bar{z}$ sebagai pasangan akar-akar dari polinomial tersebut; dan
(ii) akar-akar dari polinomial berderajat genap dapat memiliki kombinasi akar-akar yang terdiri dari bilangan real, bilangan kompleks, dan campuran dari bilangan real dan kompleks.

4. KESIMPULAN
Pada penelitian ini, peneliti telah membuktikan teorema untuk pembentukan sebuah polinomial berderajat genap dengan akar-akar bilangan kompleks. Proses pembentukan polinomial berderajat genap tidak hanya dapat menggunakan himpunan bilangan real, namun juga dapat menggunakan himpunan bilangan kompleks. Pada penggunaannya sebagai akar dari suatu polinomial berderajat genap dengan koefisien real, bilangan kompleks z memiliki prasyarat sebelum digunakan. Syarat tersebut adalah terdapatnya bilangan kompleks konjugat $\bar{z}$ sebagai pasangan akar bagi z. Peneliti berikutnya dapat meneliti syarat-syarat pembuatan polinomial dengan akar-akar bilangan kompleks pada polinomial berderajat ganjil dan pada polinomial dengan koefisien bilangan kompleks. Penelitian berikutnya juga dapat memberikan contoh yang lebih konkret dan lebih rinci terkait bahasan pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA
Ansar, A., & Abdullah, M. A. (2019). Beberapa Sifat Akar Persamaan Kuadrat Berkoefisien Bilangan Kompleks. SAINTIFIK, 5(1), 36-43. https://doi.org/10.31605/saintifik.v5i1.196.
Aryasatya, F., Luthfiyah, K., & Rosalinda, O. (2024). Complexify : Menjelajahi Bilangan Kompleks dalam Konteks Sehari - hari. Analitika: Jurnal Magister Psikologi UMA.2.
Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2022, June 2). fundamental theorem of algebra. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/science/fundamental-theorem-of-algebra.

Costa, L. da F. (2021). Complex Numbers: Real Applications of an Imaginary Concept (CDT-56). doi:10.13140/RG.2.2.12943.51362/3.

Harahap, W. F. (2016). Bilangan Kompleks [unpublished]. STIKES Binalita Sudama Medan.

Kurniawan. (2024, June 27). *Polinomial Kelas 11: Pemahaman dan Penerapannya dalam Matematika*. https://www.superprof.co.id/blog/pembagian-polinomial/.

Meilinda, C., Ahkmar, F. A., Sihombing, K. M., & Situmorang, S. A. (2023). Aplikasi Fungsi Kompleks dalam Menghitung Rangkaian RLC (Resistor, Induktor, dan Kapasitor). Medan: Universitas Negeri Medan.

Pitaloka, D. A., Setiawan, I., Firdaus, A. R.,& Mahmudah, U. (2024). Eksplorasi Sifat Aljabar pada Bilangan Kompleks dan Aplikasinya Pada Konsep Konjugat. doi: http://dx.doi.org/10.30659/jp-sa.v4i2.37409.

Purwosetiyono, D. (2015). *Modul Bilangan Kompleks*. Semarang: Universitas PGRI Semarang.

Sardi, H. (2018). *Fungsi Kompleks*. Jakarta : Universitas Terbuka.

Sukardi. (2022, May 6). *Soal dan Pembahasan – Suku Banyak/Polinomial*. https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-suku-banyak-polinomial-tingkat-sma-sederajat/.

Warsito. (2016). *Kalkulus I*. Jakarta: Universitas Terbuka.