PERBANDINGAN TURUNAN FRAKSIONAL TIPE RIEMANN-LIOUVILLE DAN CAPUTO PADA FUNGSI POLINOM

Rahmat Alqadri[1*], Selly Anastassia Amelia Kharis[1]
[1]Program Studi Matematika FST Universitas Terbuka, Tangerang Selatan

[*]Penulis korespondensi: rahmatalqadri04@gmail.com

ABSTRAK
Kalkulus fraksional merupakan cabang dari matematika yang mempelajari berbagai cabang, yaitu integral dan turunan fraksional. Peneliti memfokuskan tentang konsep turunan fraksional khususnya fungsi polinom. Tipe turunan fraksional ini terdiri dari turunan fraksional tipe Riemann-Liouville, turunan fraksional tipe Caputo, dan turunan fraksional tipe Grunwald-Letnikov. Dalam karya ilmiah ini, turunan fraksional dibatasi pada turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan tipe Caputo. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membandingkan turunan fungsi polinom dengan menggunakan turunan fraksional yang berbeda, serta mengkaji kelebihan dan kekurangan pada penggunaan kedua konsep itu. Metode penelitian yang digunakan yaitu studi literatur. Hasil yang diperoleh yaitu semakin besar orde fraksional yang diberikan pada turunan fraksional tipe Riemann-Liouville, semakin kecil hasil turunan yang diperoleh. Sedangkan pada turunan fraksional tipe Caputo, semakin besar orde yang diberikan, semakin besar pula hasil turunan yang didapatkan. Selanjutnya, terdapat kelebihan dan kekurangan pada kedua konsep turunan fraksional ini. Adapun kelebihannya, yaitu penggunaan turunan fraksional diterapkan dengan menggunakan fungsi gamma agar memperoleh hasil yang praktis pada penggunaan fungsi polinom. Sedangkan kekurangannya, yaitu pada turunan fraksional tipe Riemann-Liouville mengalami kendala memodelkan peristiwa dalam dunia nyata sehingga diperlukan turunan fraksional tipe Caputo sebagai alternatif.

Kata kunci : fungsi polinom, integral fraksional, kalkulus fraksional, turunan fraksional

1 PENDAHULUAN
Kalkulus fraksional merupakan ilmu yang mempelajari tentang turunan dan integral fraksional. Kalkulus fraksional pertama kali dikemukakan oleh Marquis L'Hopital pada tahun 1695 (Pratap, H., Kumar, S., & Singh, G., 2024; Farid, G., 2021; Srivastava, 2020). Awal mulanya muncul kalkulus fraksional yaitu pembahasan ringan antara L'Hopital dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tentang arti dari notasi Leibniz yang popular, yaitu $\frac{d^n}{dx^n}$ untuk turunan orde $n \in \mathbb{N}_0$ untuk $n = \frac{1}{2}$ (Srivastava, 2020; Janan, S., Janan, T., 2024). L'Hopital bertanya kepada Leibniz, "Bagaimana hasilnya jika $n = \frac{1}{2}$?" Leibniz merespon pertanyaan L'Hopital bahwa ini akan menjadi sebuah paradoks yang konsenkuensinya akan diputuskan (Johansyah, dkk, 2017). Selanjutnya, kalkulus fraksional ini dipelajari oleh para matematikawan lainnya seperti Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, dan Liouville (Johansyah, dkk, 2017). Penerapan dari kalkulus fraksional terdapat hampir semua disiplin ilmu pengetahuan dan teknik modern, misalnya dalam bidang reologi, viskoelastisitas, akustis, optik, kimia dan statistika fisika, robotika, teori kontrol, teori elektro dan mesin, bioteknologi, dan lain-lain (Farid, 2021; Srivastava, 2020). Penerapan ini juga termasuk pada salah satu cabang kalkulus fraksional, yaitu turunan fraksional.

Johansyah, dkk (2017) menjelaskan bahwa ada beberapa pendekatan atau definisi terkait turunan orde fraksional yaitu pendekatan turunan fraksional tipe Riemann-Liouville, pendekatan turunan fraksional Caputo, dan pendekatan turunan fraksional tipe Grunwald-Letnikov. Pada penelitian ini memfokuskan pada penggunaan konsep turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo karena peneliti mengeksplorasi apakah penggunaan kedua konsep ini memiliki perbandingan yang sama atau berbeda dalam penerapannya. Fungsi polinom atau polinomial merupakan dasar dalam berbagai disiplin ilmu dan teknik yang memiliki banyak manfaat di era modern saat ini (Geeks for Geeks, 2024). Fungsi polinomial merupakan fungsi yang memiliki banyak suku dalam peubah bebas (Azis, 2021). Banyak bidang pada penggunaan pada fungsi polinom ini seperti bidang teknik dan mesin, keuangan dan ekonomi, fisika dan matematika terapan, grafik komputer dan pengolahan gambar, sistem pemrosesan sinyal dan komunikasi, dan lain-lain. Fungsi ini termasuk hal mendasar dalam teknologi dan konstruksi yang memungkinkan pemodelan dan pengoptimalan skenario dunia nyata (Geeks for Geeks, 2024).

Beberapa penelitian yang membahas tentang turunan fraksional yaitu turunan fraksional tipe Riemann-Liouville, tipe Caputo, dan tipe Grunwald-Letnikov yang mengkaji dari berbagai penerapan. Saha Ray (2009) dalam Scotton (2024) mengkaji tentang permasalahan 1 dimensi dan 2 dimensi difusi dengan menggunakan turunan fraksional tipe Riemann-Liouville. Selanjutnya, Moreira, dkk (2019) dalam Scotton (2024) membahas tentang solusi numerik untuk persamaan adveksi-difusi dengan 3 dimensi menggunakan turunan fraksional tipe Caputo yang diterapkan pada penyebaran polutan di atmosfer. Banerjee dan Biswas (2022) mengajukan model fraksional yang berkaitan dengan turunan Caputo dan Grunwald-Letnikov untuk mendeskripsikan tentang dinamika Covid-19. Scotton (2024) membahas tentang penerapan turunan fraksional tipe Grunwald-Letnikov untuk persamaan diferensial orde satu. Penelitian Johansyah (2017) yang membahas tentang analisis turunan dan integral fraksional fungsi pangkat tiga dan fungsi eksponen. Pada artikel ilmiah ini dibahas perluasan dari hasil Johansyah, yakni turunan fraksional untuk fungsi polinom dengan pangkat lebih tinggi. Karena adanya keterbatasan pembahasan dalam penulisan artikel ini, maka peneliti hanya memfokuskan pada turunan fraksional tipe Riemann-Lioville dan Caputo khususnya penggunaan fungsi polinom.

Adapun tujuan dari penelitian ini, yaitu membandingkan turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo pada fungsi polinom serta mengkaji kelebihan dan kekurangan dari masing-masing turunan tersebut. Selanjutnya, perbandingan kedua konsep turunan fraksional ini meninjau dari berbagai orde sehingga apakah hasil kedua turunan fraksional yang diperoleh bernilai sama atau tidak.

2 METODE

2.1 Studi Literatur

Metode penelitian yang digunakan peneliti yaitu studi literatur terkait dengan penggunaan buku dan artikel ilmiah yang khususnya berkaitan tentang integral dan turunan fraksional. Selanjutnya, penulis mendefinisikan konsep dasar fungsi gamma dan beta serta konsep turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo dan membandingkan penggunaan kedua konsep turunan fraksional yang disajikan dalam tabel serta menyajikan kelebihan dan kekurangan pada penggunaan kedua konsep turunan fraksional.

2.2 Konsep Dasar Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Sebelum membahas tentang integral dan turunan fraksional, terlebih dahulu mempelajari tentang fungsi gamma dan beta sebagai konsep dasar pemahaman dengan definisi yang diperlukan dalam pembahasan artikel ini terkait dengan perbandingan konsep turunan dan integral fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo.

Definisi 2.2.1. (Kara, Budak, & Hezenci, 2022; Olver, 2010; Garrappa, Kaslik, & Popolizio, 2019; Kim & Kim, 2020)
Untuk $z \in \mathbb{C}$, maka fungsi gamma didefinisikan pada persamaan (1)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \Re e(z) > 0 \tag{1}$$

$\Gamma(z)$ adalah notasi dari fungsi gamma. Notasi $\Gamma(z)$ disimbolkan oleh Legendre. Notasi lain dari fungsi gamma yaitu $\Pi(z-1)$ dan $(z-1)!$ (Olver, 2010).

Fungsi gamma dapat direduksi menjadi persamaan (2) (Olver, 2010):

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^- \tag{2}$$

Fungsi gamma juga dapat dituliskan pada persamaan (3) (Srivastava, 2020):

$$\Gamma(z) = (z-1)!\,, \quad z \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Pada persamaan (2), fungsi gamma dapat diubah menjadi persamaan (4) (Johansyah, dkk, 2017):

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \tag{4}$$

Definisi umum pada fungsi gamma diperoleh pada persamaan (5), yaitu:

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, & \Re e(z) > 0 \\ \dfrac{\Gamma(z+n)}{\prod_{j=0}^{n-1}(z+j)}\,, & z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-;\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5}$$

Fungsi ini merupakan salah satu fungsi khusus yang paling dasar dan bermanfaat dalam analisis Matematika (Srivastava, 2020).

Seperti yang diketahui, rumus Euler untuk fungsi gamma diperoleh pada persamaan (6) (Kim & Kim, 2020)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}n^z \tag{6}$$

dimana $z \in Z_0^+$.

Pada Definisi 2.2.1. ini juga berkaitan dengan penggunaan Definisi 2.2.2. yang didefinisikan di bawah ini.

Definisi 2.2.2. (Johansyah, Nahar, & Badruzzaman, 2017; Kim & Kim, 2020)

Fungsi beta $\beta(p,q)$ didefinisikan pada persamaan (7) konvergen untuk $q > 0$

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad \Re e(p) > 0, \Re e(q) > 0 \tag{7}$$

Hubungan antara fungsi gamma dan beta diperoleh pada persamaan (8) :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{8}$$

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Turunan Fraksional Tipe Riemann-Liouville dan Sifati-Sifatnya

Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville ini membahas beberapa definisi dan sifat-sifat turunan fraksionalnya yang berdasarkan konsep dasar integral fraksional Riemann-Liouville yang disajikan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1. (McTier, 2016; Ortigueira & Machado, 2015; Albadarneh, dkk, 2021; Srivastava, 2020; Yaremko, O., & Yachmenev, A., 2023; Farid, G., 2021)

Misalkan $\xi \in \mathbb{R}$, maka didefinisikan integral fraksional tipe Riemann-Liouville orde ξ pada persamaan (9) dan (10)

$$^{RL}J_a^{\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_a^x (x-t)^{\xi-1} f(t)dt \quad (x > a; \xi > 0) \tag{9}$$

dan

$$^{RL}J_b^{\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_x^b (t-x)^{\xi-1} f(t)dt \quad (x < b; \xi > 0) \tag{10}$$

Pada dasarnya, Definisi 3.1.1. ini membahas tentang integral fraksional tipe Riemann-Liouville yang merupakan konsep dasar penggunaan turunaan fraksional khususnya tipe Riemann-Liouville dan Caputo.

Definisi 3.1.2 (Ortigueira & Machado, 2015; Albadarneh, dkk, 2021)

Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville untuk $D_a^{\xi} f$ dan $D_b^{\xi} f$ orde $\xi \in \mathbb{R}_0^+$ didefinisikan pada persamaan (11) dan (12)

$$^{RL}D_a^{\xi} f(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n {}^{RL}J_a^{n-\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\xi)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\xi-1} f(t)dt \tag{11}$$

dengan $n = [\xi] + 1; x > a$

dan

$$^{RL}D_b^{\xi} f(x) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n {}^{RL}J_b^{n-\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\xi)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\xi-1} f(t)dt \tag{12}$$

dengan $n = [\xi] + 1; x < b$, dimana $[\xi]$ artinya bagian atau orde integral dari ξ.

Dari Definisi 3.1.2. yang dibahas pada artikel ini yaitu pada persamaan (11). Selanjutnya, pada persamaan itu dapat kita gunakan untuk menyelesaikan persoalan turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo pada fungsi polinom yang disajikan secara praktis pada Definisi 3.1.3. dan Definisi 3.1.4.

Definisi 3.1.3. (Albadarneh, dkk, 2021).

Misalkan fungsi polinom $f(x) = (x - x_0)^\beta$ dengan $\beta > -1$, definisi integral fraksional tipe Riemann-Liouville untuk fungsi polinom dibentuk pada persamaan (13)

$$ {}^{RL}J_a^\xi (x - x_0)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \xi + 1)} (x - x_0)^{\beta + \xi} \tag{13} $$

Pada Definisi 3.1.3. yang membahas tentang integral fraskional ini berkaitan dengan Definisi 3.1.4. tentang turunan fraksional tipe Riemann-Liouville yang didefinisikan di bawah ini.

Definisi 3.1.4. (Albadarneh, dkk, 2021; Garrappa, Kaslik, dan Popolizio, 2019).

Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville pada fungsi polinom, yaitu:

$$ {}^{RL}D_a^\xi (x - x_0)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \xi - 1)} (x - x_0)^{\beta - \xi} \tag{14} $$

jika $\beta - \xi \notin \mathbb{N}$

Adapun sifat-sifat turunan fraksional tipe Riemann-Liouville khususnya penggunaan turunan fraksional Riemann untuk $x < a$ antara lain (Albadarneh, dkk, 2021):

a. Jika $\xi > 0$ dan $\zeta > 0$, maka

$$ {}^{RL}J_a^\xi J_a^\zeta f(t) = {}^{RL}J_a^{\xi+\zeta} f(t) \tag{15} $$

b. Turunan fraksional Riemann-Liouville merupakan invers dari operasi integral fraksional Riemann-Liouville, sehingga

$$ {}^{RL}D_a^\xi \, {}^{RL}J_a^\xi f(t) = f(t) \tag{16} $$

c. Jika $\xi > \zeta > 0$, maka

$$ {}^{RL}J_a^\zeta \, {}^{RL}J_a^\xi f(t) = {}^{RL}J_a^{\xi-\zeta} f(t) \tag{17} $$

d. Misalkan $\xi > 0, n = [\xi] + 1$ dan ${}^{RL}J_a^{n-\xi} f(t)$ adalah integral fraksional tipe Riemann-Liouville orde $(n - \xi)$.

1) Jika $p \in [1, \infty)$ dan $f(t) \in {}^{RL}J_a^\xi (L_p)$, maka

$$ {}^{RL}J_a^\xi \, {}^{RL}D_a^\xi f(t) = f(t) \tag{18} $$

2) Jika $f(t) \in L_1(a, b)$ dan ${}^{RL}J_a^{n-\xi} f(t) \in AC^n[a, b]$, maka

$$ {}^{RL}J_a^\xi \, {}^{RL}D_a^\xi f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{n-\xi}^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\xi - k + 1)} (x - a)^{\xi - k} \tag{19} $$

Secara khusus, jika $\xi = n \in \mathbb{N}$, maka:

$$ {}^{RL}J_a^\xi \, {}^{RL}D_a^\xi f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^m(a)}{m!} (x - a)^m \tag{20} $$

e. ${}^{RL}D_a^0 f(t)$ merupakan elemen netral.

f. Untuk $\xi = n \in \mathbb{N}$, persamaan (9) berlaku untuk bentuk integral ke-n (Garrapa, Kaslik, dan Popolizio, 2019; Albadarneh, dkk, 2021)

$$\begin{aligned} {}^{RL}J_a^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{21}$$

Mengenai turunan orde integer, kita dapatkan pada persamaan (22)

$$ {}^{RL}D_a^n f(t) = f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{22}$$

dimana $f^{(n)}(t)$ merupakan turunan biasa dari $y(t)$ dengan orde n.

3.2 Turunan Fraksional Tipe Caputo dan Sifat-Sifatnya

Turunan fraksional tipe Caputo disajikan definisi-definisi serta sifat-sifatnya sebagai berikut:

Definisi 3.2.1. (Albadarneh, dkk, 2021)

Misalkan $\xi \geq 0$. Jika $f(t) \in AC^n[a,b]$, maka turunan fraksional tipe Caputo ${}^{C}D_a^{\xi} f(t)$ dan ${}^{C}D_b^{\xi} f(t)$ ada hampir di mana-mana pada selang $[a,b]$.

a. Jika $\xi \notin \mathbb{N}_0$, maka ${}^{C}D_a^{\xi} f(t)$ dan ${}^{C}D_b^{\xi} f(t)$ didefinisikan pada persamaan (23) dan (24)

$$ {}^{C}D_a^{\xi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\xi)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\xi-n+1}}dt = {}^{RL}J_a^{n-\xi} D^n f(t) \tag{23}$$

dan

$$ {}^{C}D_b^{\xi} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\xi)}\int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\xi-n+1}}dt = (-1)^{n\,RL}J_b^{n-\xi} D^n f(t) \tag{24}$$

dimana $D = \frac{d}{dt}$ dan $n = [\xi] + 1$.

b. Jika $\xi = n \in \mathbb{N}_0$, maka didapatkan definisi pada persamaan (25) dan (26)

$$ {}^{C}D_a^{\xi} f(t) = f^n(t) \tag{25}$$

dan

$$ {}^{C}D_b^{\xi} f(t) = (-1)^n f^n(t) \tag{26}$$

Pada Definisi 3.2.1. poin a tentang turunan fraksional tipe Caputo dalam hal ini hanya digunakan pada persamaan (23).

Definisi 3.2.2. (Garrapa, Kaslik, & Popolizio, 2019)

Turunan fraksional tipe Caputo pada fungsi polinom didefiniskan pada persamaan (27), yaitu:

$$ {}^{C}D_a^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\xi+1)}(x-x_0)^{\beta-\xi} \tag{27}$$

Ada beberapa sifat-sifat turunan fraksional tipe Caputo, antara lain:

a. Misalkan $\xi > 0$, $\zeta > 0$, dan $n = [\xi] + 1$ dengan $f(t) \in L_\infty(a,b)$ atau $f(t) \in C[a,b]$, maka didapatkan pada persamaan (27)
$$^{C}D_a^{\xi}\,{}^{RL}J_a^{\xi} f(t) = f(t) - \frac{{}^{RL}J_a^{\xi+1-n} y(a)}{\Gamma(n-\xi)}(x-a)^{n-\xi} \tag{28}$$
Kita peroleh juga pada persamaan (28)
$$^{RL}J_a^{\xi} f^{(m)}(t) = {}^{RL}J_a^{\xi-m} f(t) \quad (k = 0,1,\dots,n-1) \tag{29}$$

b. Misalkan $\xi \notin \mathbb{N}$. Jika $f(t) \in AC^n[a,b]$ $(f(t) \in C^n[a,b]$, maka didapatkan pada persamaan (29)
$$^{RL}J_a^{\xi}\,{}^{C}D_a^{\xi} f(t) = {}^{RL}J_a^{\xi}\,{}^{RL}J_a^{n-\xi} D^n f(t) = {}^{RL}J_a^{\xi} D_a^n f(t) \tag{30}$$

c. Sifat elemen netral turunan fraksional tipe Caputo sama dengan sifat elemen netral turunan fraksional tipe Riemann-Liouville
d. Turunan fraksional tipe Caputo orde bilangan bulat negatif sama dengan penggunaan definisi integral fraksional tipe Riemann-Liouville. Permasalahan turunan ini sederhana. Faktanya ekuivalen dengan elemen netral ($\xi - n - 1 = 0$).

3.3 Perbandingan Penggunaan Konsep Turunan Fraksional untuk Fungsi Polinom

Penggunaan konsep turunan fraksional khususnya tipe Riemann-Liouville dan Caputo pada fungsi polinom disajikan beberapa contoh dan kemudian disajikan dalam Tabel 1 sebagai perbandingan antara kedua konsep itu. Sebagai contoh, jika diberikan orde fraksional yaitu $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ dengan fungsi $f(x) = (x-1)^5$, $f(x) = (x+1)^3$, dan $\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$ dan $a = 0$, maka lakukan perhitungan turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo pada orde yang diketahui sehingga didapatkan:

3.3.1. Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville untuk:

a. $\xi = \frac{1}{2}$ dengan masing-masing fungsi $f(x)$ dan x_0 yang diketahui, maka berdasarkan Definisi 6 pada persamaan (14), diperoleh:
$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}(x-1)^5 &= \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(5+\frac{1}{2}-1\right)}(x-1)^{5-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}(x-1)^{\frac{9}{2}} = \frac{(6-1)!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{9}{2}} \\
&= \frac{120}{\frac{945}{32}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{9}{2}} = \frac{256}{63\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{9}{2}} \\
&= \frac{256}{63}(x-1)^4\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}(x+1)^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}-1\right)}(x+1)^{3-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(x+1)^{3-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(4-1)!}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{5}{2}} = \frac{6}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{16}{5}(x+1)^2\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4+\frac{1}{2}-1\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{(5-1)!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{24}{\frac{105}{16}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{128}{35\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{128}{35}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}
\end{aligned}
$$

b. $\xi = \frac{3}{2}$ dengan masing-masing $f(x)$ dan x_0 yang diketahui, diperoleh:

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}(x-1)^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(5+\frac{3}{2}-1\right)}(x-1)^{5-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}(x-1)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{(6-1)!}{\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}} = \frac{120}{\frac{10395}{64}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}} \\
&= \frac{512}{693\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}} = \frac{512}{693}(x-1)^3\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}(x+1)^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3+\frac{3}{2}-1\right)}(x+1)^{3-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}(x+1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{(4-1)!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{6}{\frac{105}{16}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{35\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{32}{35}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4+\frac{3}{2}-1\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{(5-1)!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{24}{\frac{945}{32}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{256}{315\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{256}{315}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$$

c. $\xi = \frac{5}{2}$ dengan masing-masing $f(x)$ dan x_0 yang diketahui, diperoleh:

$$^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{RL}D_0^{\frac{5}{2}}(x-1)^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(5+\frac{5}{2}-1\right)}(x-1)^{5-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{(6-1)!}{\frac{13}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{120}{\frac{135135}{128}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1024}{9009\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{1024}{9009}(x-1)^{2}\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{RL}D_0^{\frac{5}{2}}(x+1)^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3+\frac{5}{2}-1\right)}(x+1)^{3-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(4-1)!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{945}{32}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{64}{315\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{64}{315}\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$$

$$^{RL}D_0^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{RL}D_0^{\frac{5}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4+\frac{5}{2}-1\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{(5-1)!}{\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{24}{\frac{10395}{64}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{256}{3465\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{512}{3465}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$$

3.3.2. Turunan fraksional tipe Caputo untuk :

1 $\xi = \frac{1}{2}$ dengan masing-masing $f(x)$ dan x_0 yang diketahui, maka berdasarkan Definisi 7 pada persamaan (27) diperoleh:

$$^{C}D_a^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{C}D_0^{\frac{1}{2}}(x-1)^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(5-\frac{1}{2}+1\right)}(x-1)^{5-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}(x-1)^{\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{(6-1)!}{\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{9}{2}} = \frac{120}{\frac{10395}{64}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{512}{693\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{9}{2}} = \frac{512}{693}(x-1)^{4}\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$$

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a}^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{C}D_{0}^{\frac{1}{2}}(x+1)^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3-\frac{1}{2}+1\right)}(x+1)^{3-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}(x+1)^{\frac{5}{2}}\\
&= \frac{(4-1)!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{5}{2}} = \frac{6}{\frac{105}{16}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{5}{2}} = \frac{32}{35\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{5}{2}}\\
&= \frac{32}{35}(x+1)^2\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a}^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{C}D_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4-\frac{1}{2}+1\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\\
&= \frac{(5-1)!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{24}{\frac{945}{32}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\\
&= \frac{256}{315\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{256}{315}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}
\end{aligned}$$

2 $\xi = \frac{3}{2}$ dengan masing-masing $f(x)$ dan x_0 yang diketahui, diperoleh:

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a}^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{C}D_{0}^{\frac{3}{2}}(x-1)^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(5-\frac{3}{2}+1\right)}(x-1)^{5-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}(x-1)^{\frac{7}{2}}\\
&= \frac{(6-1)!}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}} = \frac{120}{\frac{945}{32}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}} = \frac{256}{63\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{7}{2}}\\
&= \frac{256}{63}(x-1)^3\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a}^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{C}D_{0}^{\frac{3}{2}}(x+1)^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3-\frac{3}{2}+1\right)}(x+1)^{3-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(x+1)^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{(4-1)!}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{6}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{16}{5}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a}^{\xi}(x-x_0)^{\beta} &= {}^{C}D_{0}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4-\frac{3}{2}+1\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\\
&= \frac{(5-1)!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{24}{\frac{105}{16}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{128}{35\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{128}{35}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$$

3 $\xi = \frac{5}{2}$ dengan masing-masing $f(x)$ dan x_0 yang diketahui, diperoleh:

$$ {}^{C}D_a^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{C}D_0^{\frac{5}{2}}(x-1)^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(5-\frac{5}{2}+1\right)}(x-1)^{5-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{(6-1)!}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{120}{\frac{105}{16}\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{128}{7\sqrt{\pi}}(x-1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{128}{7}(x-1)^2\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$$

$$ {}^{C}D_a^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{C}D_0^{\frac{5}{2}}(x+1)^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(3-\frac{5}{2}+1\right)}(x+1)^{3-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(4-1)!}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}(x+1)^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$$

$$ {}^{C}D_a^{\xi}(x-x_0)^{\beta} = {}^{C}D_0^{\frac{5}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4-\frac{5}{2}+1\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{4-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{(5-1)!}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{24}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{64}{5\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{64}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$$

Selanjutnya, hasil turunan fraksional tipe Riemann-Liouvile dan Caputo yang diperoleh disajikan pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1. Hasil Perbandingan Turunan Fraksional pada Fungsi Polinom

$f(x)$	Orde	Turunan Fraksional Tipe Riemann-Liouville	Turunan Fraksional Tipe Caputo
	$\frac{1}{2}$	$\frac{256}{63}(x-1)^4\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$	$\frac{512}{693}(x-1)^4\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$
$(x-1)^5$	$\frac{3}{2}$	$\frac{512}{693}(x-1)^3\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$	$\frac{256}{63}(x-1)^3\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$
	$\frac{5}{2}$	$\frac{1024}{9009}(x-1)^2\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$	$\frac{128}{7}(x-1)^2\sqrt{\frac{x-1}{\pi}}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{16}{5}(x+1)^2\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$	$\frac{32}{35}(x+1)^2\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$
$(x+1)^3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{32}{35}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$	$\frac{16}{5}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$
	$\frac{5}{2}$	$\frac{64}{315}\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$	$8\sqrt{\frac{x+1}{\pi}}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{128}{35}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$	$\frac{256}{315}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{3}{2}$	$\frac{256}{315}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$	$\frac{128}{35}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$
	$\frac{5}{2}$	$\frac{512}{3465}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$	$\frac{64}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2x-1}{2\pi}}$

Dari tabel di atas, terdapat perbedaan hasil penggunaan konsep turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo. Hal ini terlihat dari perbedaannya dari penggunaan orde untuk turunan fraksional yang mengakibatkan hasil turunan fraksional itu khususnya hasil koefisien pada fungsi polinom berbeda. Selanjutnya, penggunaan orde turunan fraksional ini juga terlihat naik-turun pada koefisien hasil turunan fraksional. Pada turunan fraksional tipe Riemann-Liouville, semakin tinggi orde yang diberikan, semakin rendah koefisien yang didapatkan pada hasil itu. Sedangkan pada turunan fraksional tipe Caputo, semakin tinggi orde yang diberikan, semakin tinggi juga koefisien yang diberikan. Pada penggunaan orde yang sama yang ditinjau dari koefisien yang diperoleh, hasil turunan fraksional tipe Riemann-Liouville lebih besar daripada hasil turunan fraksional tipe Caputo.

Selanjutnya, kelebihan pada kedua konsep turunan fraksional ini khususnya tipe Riemann-Liouville dan Caputo yaitu penggunaan turunan fraksional ini diterapkan dengan menggunakan fungsi gamma sehingga memperoleh hasil yang praktis dan mudah dipahami. Kelebihan yang lainnya, yaitu pada penggunaan kedua konsep turunan fraksional khususnya fungsi polinom tidak mengalami perubahan hasil fungsi polinom sehingga penggunaan kedua konsep turunan fraksional ini sangat efisien untuk digunakan.

Selain dari kelebihan yang didapatkan, terdapat juga kekurangan pada penggunaan kedua konsep turunan fraksional, yaitu turunan Riemann-Liouville mengalami kendala untuk memodelkan peristiwa dalam dunia nyata. Hal ini disebabkan karena memerlukan definisi syarat batas dan nilai awal berorde fraksional. Definisi syarat ini belum mempunyai interpretasi yang jelas dalam kehidupan nyata sehingga perlu dikenalkan turunan fraksional Caputo sebagai alternatif (Johansyah, dkk, 2017).

4 KESIMPULAN

Turunan fraksional merupakan bentuk yang paling umum dari turunan integer. Turunan fraksional tidak hanya dibatasi oleh bilangan bulat, tetapi dibatasi juga oleh bilangan rasional dengan $\xi > 0$. Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo pada mulanya berasal dari penggunaan konsep integral tipe Riemann-Liouville yang berhubungan dengan penggunaan konsep fungsi gamma. Hasil turunan fraksional tipe Riemann-Liouville dan Caputo pada orde yang diberikan memiliki perbedaan hasil yang terletak pada koefisien yang diperoleh. Semakin besar orde fraksional yang diberikan pada turunan fraksional tipe Riemann-Liouville, semakin kecil hasil turunan yang diperoleh. Sedangkan pada turunan fraksional tipe Caputo, semakin besar orde yang diberikan, semakin besar pula hasil turunan yang didapatkan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing saya yang telah memberikan saran, masukan, serta bimbingan selama proses penulisan ini. Berkat bimbingannya, saya telah menyelesaian penulisan ini dengan baik. Selanjutnya, saya mengucapkan terima kasih kepada teman-teman dan keluarga yang telah mendukung penulis ini dengan doa yang baik kepada penulis sehingga dapat menyelesakan proses penulisan ini dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

Albadarneh, R., dkk. (2021). Numerical Approach of Riemann-Liouville Fractional Derivative Operator. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, 11(6), 5367-5378. http://doi.org/10.11591/ijece.v11i6.pp5367-5378

Azis, D., dkk. (2021). The Use of Fractional Integral and Fractional Derivative "$\alpha = \frac{5}{2}$" in the 5^{th} Order Function and Exponential Function using the Riemann-Liouville Method. *Applied Mathematics*, 11(2), 23-27. http://repository.lppm.unila.ac.id/35180/1/Fractional%20integral.pdf

Banerjee, R., & Biswas, R. K. (2022). Fractional optimal control of compartmental SIR model of COVID-19: Showing the impact of effective vaccination. *IFAC PapersOnLine*, 55(1), 616–622. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.04.101

Farid, G. (2021). Bounds of Riemann-Liouville Fractional Integral Operators. *Computational Methods for Differential Equations*, 9(2), 637-648. https://doi.org/10.22034/cmde.2020.32653.1516

Garrappa, R., Kaslik, E., & Popolizio, M. (2019). Evaluation of Fractional Integrals and Derivatives of Elementary Functions: Overview and Tutorial. ***Multidisciplinary Digital Publishing Institute*, 7(5), 1-21.** https://doi.org/10.3390/math7050407

Geeks (2024, 27 April). *Real-life applications of polynomials*. https://www.geeksforgeeks.org/real-life-applications-of-polynomials/

Janan, S., & Janan, T. (2024). Fractional Derivative of Hyperbolic Function. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, *21*(1), 267-284. https://doi.org/10.20956/j.v21i1.35860

Johansyah, M. D., Nahar, J., & Badruzzaman, F.H. (2017). Analisis Turunan dan Integral Fraksional Fungsi Pangkat Tiga dan Fungsi Eksponensial. *Jurnal Matematika*, 16(2), 1-9. https://doi.org/10.29313/jmtm.v16i2.3357

Johansyah, M. D., dkk. (2017). Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville. *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*. 8, 204-209.

Kara, H., Budak, H., & Hezenci, F. (2022). New Extensions of the Parameterized Inequalities Based on Riemann–Liouville Fractional Integrals. *Mathematics*, 10(18), 3374. https://doi.org/10.3390/math10183374

Kim, T., Kim, D.S. (2020). Note on the Degenerate Gamma Function. *Russ. J. Math. Phys.* 27, 352–358 https://doi.org/10.1134/S1061920820030061

McTier, A. (2016). *Fractional Calculus Fundamentals and Applications in Economic Modeling* (*Thesis*). Georgia: Georgia College and State University.

Moreira, D., dkk. (2019). New approach to solving the atmospheric pollutant dispersion equation using fractional derivatives. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 144, 118667–118675. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118667

Olver, F. W., dkk. (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York: National Istitute of Standars and Technology.

Ortigueira, M. D., & Machado, J. T. (2015). What is a fractional derivative?. *Journal of Computational Physics*, 293, 4-13. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019

Pratap, H., Kumar, S., & Singh, G. (2024). Brief History of Fractional Calculus: A Survey. *Migration Letters*, 21(S7), 238–242. https://migrationletters.com/index.php/ml/article/view/8675

Saha Ray, S. (2009). Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two-step adomian decomposition method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1295– 1306. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.01.010

Scotton, J. W. (2024). Grünwald-Letnikov Fractional Derivative Applied to First-Order Ordinary Differential Equations. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, *45*, e51533-e51533. https://doi.org/10.5433/1679-0375.2024.v45.51533

Srivastava, H. M. (2020). Fractional-Order Derivatives and Integral : Introductory Overview and Recent Developments. *Kyungpook Mathematical Journal*, 60(1), 73–116. https://doi.org/10.5666/KMJ.2020.60.1.73

Yaremko, O., & Yachmenev, A. (2023). Fractional integration and differentiation. *arXiv preprint*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.03207