NILAI MINIMUM SPAN PELABELAN BERBASIS JARAK PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA LINTASAN DAN SIKLUS

Hafif Komarullah[1*], Finka Afdhilatul Jannah Im[2], Zulfi Jummala Khilda Maulidi[3]
[1,2,3]*Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia*

**Penulis korespondensi:* hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji nilai minimum *span* pada graf hasil operasi korona antara lintasan dan siklus, yaitu $P_m \odot C_n$. Pelabelan $L(2,1)$ merupakan salah satu jenis pelabelan yang menggunakan himpunan titik sebagai domain, di mana setiap titik dipetakan ke bilangan bulat non-negatif. Aturan dalam pelabelan ini mengharuskan selisih label minimal dua untuk pasangan titik yang berjarak satu, serta minimal satu untuk pasangan titik yang berjarak dua. Fokus utama dari pelabelan $L(2,1)$ adalah menentukan label maksimum terkecil (*minimum span*), yang dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}$. Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini meliputi studi literatur, analisis deskriptif aksiomatik, dan identifikasi pola. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) = n + 4$.

Kata kunci: Minimum Span, Operasi Korona, Pelabelan L(2,1).

1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang memiliki peran penting dalam berbagai bidang, seperti ilmu computer (Mahardika, 2019), teknik elektro (Annisa & Muliani, 2020), biologi (Suharini et al., 2023), ilmu sosial (Insani & Waryanto, 2012), dan lain-lain. Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf (*graph labeling*), yaitu pemberian label atau bilangan pada elemen-elemen graf (titik, sisi, atau keduanya) dengan memenuhi aturan tertentu (Gallian, 2022). Pelabelan ini tidak hanya memiliki nilai teoritis, tetapi juga relevan dalam aplikasi nyata seperti penentuan frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992), penjadwalan (Rahadi, 2019), kriptografi (Prihandoko et al., 2019), penentuan jalur terpendek (Komarullah, 2025), dan lain-lain.

Salah satu jenis pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan $L(2,1)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada suatu graf adalah fungsi dari himpunan titik ke himpunan bilangan bulat non-negatif sedemikian sehingga dua titik yang bertetangga diberi label yang berbeda minimal 2, dan dua titik yang berjarak dua diberi label yang berbeda minimal 1. Permasalahan utama dalam pelabelan ini adalah menentukan nilai minimum dari rentang label (disebut *span*) yang digunakan, yang dikenal sebagai nilai minimum *span* yang dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}$ (Griggs & Yeh, 1992).

Berbagai kelas graf telah menjadi objek kajian para peneliti dalam upaya menentukan nilai minimum *span* dari pelabelan $L(2,1)$. Diketahui bahwa graf siklus C_n dan graf lintasan P_n memiliki nilai *span* minimum sebesar 4. Sementara itu, graf bintang S_n dan graf roda W_n masing-masing memiliki nilai *span* minimum sebesar $n + 1$, sebagaimana dikemukakan oleh Griggs dan Yeh (1992). Untuk graf Sierpinski $S_{n,m}$ dengan nilai $m = 2$ dan $m = 3$, nilai *span* minimumnya tetap sama, yaitu 4 (Sagala & Susiana, 2017). Selain itu, graf lollipop $L_{m,n}$ dan graf pendulum P_n^k memiliki *span* minimum masing-masing sebesar $2m - 1$ dan $k + 1$ (Umam et al., 2022). Informasi tambahan terkait pelabelan $L(2,1)$ juga dapat ditemukan dalam berbagai penelitian lain seperti oleh Fatimah et al. (2016), Aminulloh (2019), Halikin & Komarullah (2022), Komarullah et al. (2022), serta Komarullah (2023).

Prakoso (2023) melakukan kajian tentang pelabelan $L(2,1)$ graf hasil operasi korona lintasan dan siklus ($P_5 \odot C_n$) dan lintasan dengan titik lebih dari lima masih menjadi masalah terbuka, sehingga dalam kajian ini akan berfokus mencari nilai minimum *span* pada graf yang sama dengan order lintasan lebih dari lima. Operasi korona dari graf G dan graf H dinotasikan sebagai $G \odot H$. Graf hasil $G \odot H$ merupakan duplikat dari graf H sebanyak $|V(G)|$ kemudian duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1,2,3,\ldots,|V(G)|$ dihubungkan dengan setiap titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i (Frucht dan Harary, 1970). Dalam artikel ini, peneliti akan melanjutkan penelitian dari Prakoso (2023) yaitu mencari nilai minimum span pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus dengan order dari graf lintasan lebih dari 5.

2 METODE

Penelitian ini merupakan studi teoritis yang bersifat kualitatif deskriptif dengan pendekatan analitik terhadap struktur graf. Fokus utama penelitian ini adalah menentukan nilai minimum *span* pada graf hasil operasi korona antara graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_n, yang dilambangkan dengan $P_m \odot C_n$. Proses pelabelan dilakukan dengan mempertimbangkan aturan pelabelan $L(2,1)$, yaitu:

a. Jika dua titik bertetangga, maka selisih labelnya minimal 2.
b. Jika dua titik berjarak dua, maka selisih labelnya minimal 1.

Langkah-langkah penelitian dilakukan sebagai berikut:

a. Menentukan kelas graf yang akan diteliti.
b. Melakukan penotasian titik dan sisi pada graf yang dipilih.
c. Melakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf yang dipilih dengan order tertentu.
d. Menentukan nilai minimum *span* dari setiap pelabelan $L(2,1)$ pada graf yang dipilih dengan order tertentu.
e. Menganalisi pola pelabelan dan menyusunnya dalam bentuk teorema.
f. Membuktikan teorema.

Untuk membuktikan teorema dalam penelitian ini, dipaparkan beberapa lemma sebagai berikut.

Lemma 1. (Lum, 2007)
Jika H adalah sebuah subgraf dari G, maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Lemma 2. (Prakoso, 2023)
$\lambda_{2,1}(P_5 \odot C_n) = n + 4$, dengan $n \geq 3$.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

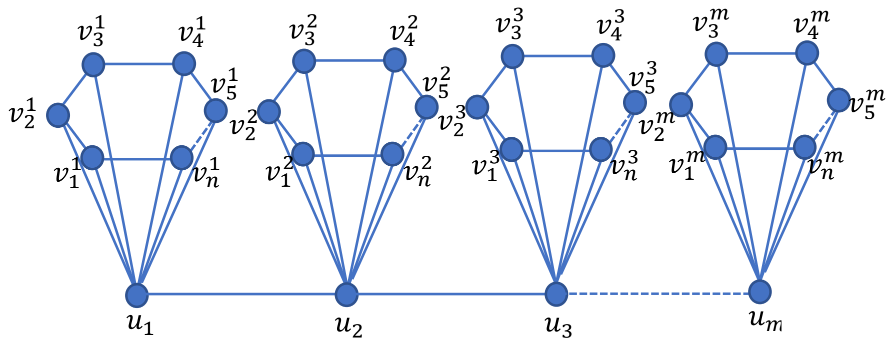
Pada bagian ini akan dibahas tentang hasil dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf hasil dari operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_m \odot C_n$. Penotasian titik dan sisi pada graf $P_m \odot C_n$ adalah sebagai berikut.

$V(P_m \odot C_n) = \{u_i; i = 1,2,\ldots,m\} \cup \{v_j^i; i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n\}$

$E(P_m \odot C_n) = \{u_i u_{i+1};\ i = 1,2,\ldots,m-1\} \cup \{u_i v_j^i;\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,3,\ldots,n\} \cup$

$\{v_j^i v_{j+1}^i;\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n-1\} \cup \{v_1^i v_n^i;\ i = 1,2,\ldots,m\}$.

Ilustrasi penotasian titik dan sisi dari graf hasil dari operasi korona graf lintasan dan graf siklus $P_m \odot C_n$ dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Penotasian titik dan sisi pada graf $P_m \odot C_n$

Teorema 1. Untuk sebarang graf hasil operasi korona lintasan dan siklus $(P_m \odot C_n)$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, , $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) = n + 4$.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) = n + 4$, maka perlu dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \geq n + 4$ dan $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \leq n + 4$. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \geq n + 4$. Pandang bahwa graf $P_5 \odot C_n$ adalah subgraf dari graf $P_m \odot C_n$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \geq \lambda_{2,1}(P_5 \odot C_n) = n + 4$, sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \geq n + 4$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \leq n + 4$ yaitu dengan membangun fungsi pelabelan pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus $(P_m \odot C_n)$ yang memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$. Definisikan fungsi $f: V(P_m \odot C_n) \to \{0, 1, \dots, n + 4\}$ yang dibagi menjadi tiga kasus sebagai berikut.

1. Kasus $n = 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} 6; i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 3; i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 0; i \equiv 0 \; mod \; 3. \end{cases}$$

$$f(v_1^i) = \begin{cases} 0; i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 1; i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 2; i \equiv 0 \; mod \; 3. \end{cases}$$

$$f(v_2^i) = \begin{cases} 2; i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 7; i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 4; i \equiv 0 \; mod \; 3. \end{cases}$$

$$f(v_3^i) = \begin{cases} 4; i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 5; i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 7; i \equiv 0 \; mod \; 3. \end{cases}$$

2. Kasus $n = 4$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0; i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 4; i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 8; i \equiv 0 \; mod \; 3. \end{cases}$$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} 2; j = 1, \\ 5; j = 2 \wedge (i \equiv 1 \; mod \; 3 \vee i \equiv 0 \; mod \; 3, \\ 7; j = 2 \wedge i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 3; j = 3 \wedge i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 1; j = 3 \wedge (i \equiv 2 \; mod \; 3 \vee i \equiv 0 \; mod \; 3, \\ 6; j = 4. \end{cases}$$

3. Kasus $n > 4$

$$f(u_i) = \begin{cases} 6; i \equiv 1 \; mod \; 3, \\ 3; i \equiv 2 \; mod \; 3, \\ 0; i \equiv 0 \; mod \; 3. \end{cases}$$

Pada kasus $n > 4$ label titik v_j^i dibagi menjadi empat sub kasus sebagai berikut.

a. Untuk n ganjil dan $i \neq 2 \; mod \; 3$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} \dfrac{j+3}{2} & ; j \text{ ganjil,} \\ \dfrac{n+j+3}{2} & ; j \text{ genap.} \end{cases}$$

b. Untuk n ganjil dan $i \equiv 2 \; mod \; 3$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} \dfrac{j+1}{2} & ; j \text{ ganjil,} \\ \dfrac{n+j+1}{2} & ; j \text{ genap.} \end{cases}$$

c. Untuk n genap dan $i \neq 2 \; mod \; 3$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} \dfrac{j+3}{2} & ; j \text{ ganjil,} \\ \dfrac{n+j}{2} + 1 & ; j \text{ genap.} \end{cases}$$

d. Untuk n genap dan $i \equiv 2 \; mod \; 3$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} \dfrac{j+1}{2} ; j \text{ ganjil,} \\ \dfrac{n+j}{2} ; j \text{ genap.} \end{cases}$$

Dengan mudah dapat diverifikasi bahwa setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label minimal satu dan setiap titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal dua, sehingga diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \leq n + 4$. Berdasarkan pembuktian di atas diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \geq n + 4$ dan $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) \leq n + 4$, sehingga terbukti $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) = n + 4$. ■

4 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, didapatkan bahwa nilai minimum *span* pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus $(P_m \odot C_n)$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, , $\lambda_{2,1}(P_m \odot C_n) = n + 4$. Saran untuk penelitian selanjutnya yakni, menganalisis nilai minimum *span* pada kelas graf lain atau menerapkan pelabelan $L(2,1)$ pada kehidupan sehari-hari.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing dan rekan-rekan di lingkungan Program Studi Tadris Matematika Universitas Al Falah Assunniyyah yang telah memberikan masukan, dukungan, dan motivasi selama proses penyusunan penelitian ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada pihak institusi yang telah menyediakan fasilitas dan sumber daya yang diperlukan dalam menunjang kelancaran penelitian. Penulis berharap hasil dari penelitian ini dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan ilmu matematika, khususnya dalam kajian teori graf dan pelabelan graf.

DAFTAR PUSTAKA

Aminulloh, M.R.A. (2019). Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi L(2,1) pada graf petersen P (n, 1). Skripsi. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Annisa, F., & Muliani, F. (2020). Penerapan Algoritma Kruskal Dalam Sisrem Jaringan Listrik Di Kecamatan Langsa Baro. *JURNAL GAMMA-PI*, *2*(02), 5-9. https://ejurnalunsam.id/index.php/jgp/article/view/2755

Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan L (2, 1) pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, *13*(2). https://core.ac.uk/reader/290089130

Frucht R. and Harary F. (1970). On the corona of two graphs. *Aequationes Mathematicae*. *4*, 322–325. https://doi.org/10.1007/BF01844162

Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, *6*(25), 4-623. Article DS6. https://doi.org/10.37236/11668

Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *5*(4), 586-595. https://doi.org/10.1137/0405048

Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008

Insani, N., & Waryanto, N. H. (2012). Penerapan Teori Graf pada Analisis Jejaring Sosial dengan Menggunakan Microsoft Microsoft Node Xl. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, *7*(1), 83-90. https://doi.org/10.21831/pg.v7i1.2839

Komarullah, H. (2025). Penggunaan Algoritma Dijkstra Dalam Menentukan Rute Terpendek Wisata Di Kabupaten Jember. *AS-SUNNIYYAH*, *4*(02), 96-101. https://doi.org/10.62097/assunniyyah.v4i02.2139

Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prossiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999

Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009

Lum, A. (2007). Upper Bound on L(2,1)-labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ. Retrieved from https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf

Mahardika, F. (2019). Penerapan Teori Graf Pada Jaringan Komputer Dengan Algoritma Kruskal. *Jurnal Informatika: Jurnal Pengembangan IT*, *4*(1), 48-53. https://doi.org/10.30591/jpit.v4i1.1032

Prakoso, A. (2023). Pelabelan L (2, 1) Pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Lintasan dan Graf Lingkaran. Skripsi, Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Jember, Jember.

Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, *3*(1), 14-23. http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2

Rahadi, A. P. (2019). Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Pewarnaan Graf Dengan Algoritma Largest First. *Jurnal Padegogik*, *2*(1), 1-13. https://doi.org/10.35974/jpd.v2i1.1067

Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan L(2,1) pada Graf Sierpinski S(n,k). *Karismatika*, 3(2), 130-139.

Suharini, Y. S., Ramli, M., Sulistyowati, S., & RD, E. (2023). Pendekatan Teori Graf untuk Analisis Jaringan Interaksi Protein-Protein. *Jurnal Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, *7*(2), 1-7. https://doi.org/10.31543/jii.v7i2.258

Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). L (2, 1) Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010