SPAN TERKECIL DARI PELABELAN L(2,1) PADA GRAF DUMBBELL

Hafif Komarullah[1*], Maura Delva Saputri[2], Rizqy Amalia Nurfadila[3]
[1,2,3]Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

**Penulis korespondensi: hafififa4@gmail.com*

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis nilai minimum *span* pada graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$. Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari 2 graf siklus C_m dan C_l yang dihubungkan dengan sebuah graf lintasan P_n dengan kedua titik ujung graf lintasan P_n adalah salah satu titik dari masing-masing graf siklus. Pelabelan $L(2,1)$ adalah salah satu tipe pelabelan dengan domain berupa titik yang didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan titik-titik dalam graf dengan bilangan bulat non-negatif, dengan ketentuan bahwa untuk setiap dua titik yang terpisah oleh jarak satu, selisih labelnya harus minimal dua, dan untuk setiap dua titik yang terpisah oleh jarak dua, selisih labelnya harus minimal satu. Konsep pelabelan $L(2,1)$ berfokus pada penentuan nilai minimum dari label terbesar (nilai minimum *span*) yang dilambangkan dengan $\lambda_{2,1}$. Metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai minimum *span* adalah studi literatur, deskriptif aksiomatik, dan pendeteksian pola. Dalam paper ini, diperoleh bahwa nilai minimum *span* pada *dumbbell* $D_{m,l,n}$ adalah 4.
Kata kunci: *Dumbbell,* Minimum *Span,* Pelabelan $L(2,1)$.

1 PENDAHULUAN

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam rangka menyelesaikan teka-teki Jembatan Königsberg. Dalam penggunaannya, teori graf menggambarkan objek permasalahan sebagai titik dan hubungan antar objek tersebut sebagai sisi. Secara formal, graf dinyatakan dengan notasi $G(V,E)$, di mana V adalah himpunan tak kosong yang merepresentasikant titik, dan E adalah himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik di V, yang disebut sisi dan dapat berupa himpunan kosong. Jumlah titik pada graf G disebut order dari graf, sedangkan jumlah sisi disebut ukuran graf (Chartrand & Zhang, 2019). Hingga saat ini, teori graf telah berkembang dengan berbagai topik, salah satunya adalah pelabelan graf.

Sadlacek merupakan tokoh pertama yang memperkenalkan konsep pelabelan graf, yang didefinisikan sebagai pemetaan elemen-elemen graf baik titik, sisi, maupun keduanya ke bilangan bulat non negatif dengan memenuhi syarat-syarat tertentu (Gallian, 2022). Seiring perkembangan riset di bidang ini, telah tercatat lebih dari 200 jenis pelabelan graf yang diteliti dan dipublikasikan dalam lebih dari 3000 artikel ilmiah (Gallian, 2022). Berdasarkan domainnya, pelabelan graf diklasifikasikan menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik (jika domainnya adalah titik), pelabelan sisi (jika domainnya adalah sisi), dan pelabelan total (jika domain mencakup titik dan sisi) (Julaeha dkk., 2017).

Penerapan pelabelan graf sangat penting dalam berbagai bidang, seperti alokasi frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992), kriptografi (Prihandoko et al., 2019), kristalografi (Kumar & Vats, 2020), jaringan komunikasi (Prasanna et al., 2014), dan ilmu komputer (Vinutha & Arathi, 2017). Salah satu contoh konkret dari penerapan pelabelan graf adalah dalam penjadwalan frekuensi pemancar radio, di mana pemancar yang berdekatan tidak boleh menggunakan frekuensi yang sama. Griggs dan Yeh pada tahun 1992 merumuskan penggunaan bilangan bulat non negatif untuk

merepresentasikan saluran radio, serta mengusulkan aturan pelabelan di mana dua titik yang berdekatan harus memiliki selisih label minimal dua. Gagasan ini merupakan pengembangan dari permasalahan alokasi frekuensi yang sebelumnya telah dikaji oleh Hale (1980). Untuk menghindari interferensi, pemancar yang berdekatan harus memiliki perbedaan frekuensi yang cukup, yang secara grafis dimodelkan dengan titik sebagai pemancar dan sisi sebagai relasi keterdekatan antar pemancar. Berdasarkan model ini, Griggs dan Yeh kemudian memperkenalkan konsep pelabelan $L(2,1)$ yang secara khusus ditujukan untuk mengatasi persoalan penjadwalan frekuensi.

Misalkan G adalah graf sederhana yang terhubung, dengan $V(G)$ sebagai himpunan titik dan $E(G)$ sebagai himpunan sisinya. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G didefinisikan sebagai suatu fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0,1, \dots, k\}$, yang memenuhi ketentuan bahwa dua titik yang bertetangga (berjarak satu) harus memiliki selisih label paling sedikit dua, dan dua titik yang berjarak dua harus memiliki selisih label minimal satu (Griggs & Yeh, 1992). Jarak antara dua titik u dan v dalam graf terhubung G didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek yang menghubungkan keduanya, yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Budayasa, 2007). Nilai label tertinggi yang digunakan dalam pelabelan $L(2,1)$ pada graf G disebut sebagai $span(G)$. Karena suatu graf G dapat memiliki lebih dari satu kemungkinan pelabelan yang memenuhi syarat, maka fokus kajian pelabelan $L(2,1)$ adalah menentukan nilai minimum dari *span* tersebut, yang dilambangkan dengan $\lambda_{2,1}(G)$(Shao et al., 2008).

Sejumlah kelas graf telah diteliti oleh para peneliti sebelumnya untuk menentukan nilai minimum *span* dari pelabelan $L(2,1)$ nya. Diketahui bahwa graf siklus C_n dan graf lintasan P_n masing-masing memiliki nilai minimum *span* sebesar 4. Untuk graf bintang S_n dan graf roda W_n, nilai minimum span-nya adalah $n + 1$ (Griggs & Yeh, 1992). Graf Sierpinski $S_{n,m}$ dengan $m = 2$ dan $m = 3$, memiliki nilai minimum span yang sama, yaitu 4 (Sagala & Susiana, 2017). Adapun graf Lollipop $L_{m,n}$ dan graf pendulum (P_n^k) memiliki nilai minimum *span* masing-masing sebesar $2m - 1$ dan $k + 1$ (Umam et al., 2022). Berbagai hasil lain mengenai pelabelan $L(2,1)$ dapat ditemukan dalam penelitian-penelitian seperti Fatimah et al. (2016), Aminulloh & Afif (2019), Halikin & Komarullah (2022), Komarullah et al. (2022), dan Komarullah (2023).

Dalam artikel ini akan dibahas pelabelan $L(2, 1)$ pada graf *dumbbell*. Graf *dumbbell* dipilih karena masih menjadi masalah terbuka. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan nilai minimum *span* dari pelabelan $L(2, 1)$ pada graf *dumbbell*. Kajian ini tidak hanya memperkaya khasanah teori pelabelan graf, tetapi juga dapat menjadi referensi dalam pengembangan sistem yang membutuhkan pengalokasian sumber daya secara efisien. Penelitian ini juga membuka peluang bagi kajian lebih lanjut pada jenis-jenis graf lainnya yang memiliki struktur kompleks dan menarik untuk dianalisis secara matematis.

2 METODE

Pada artikel ini, peneliti menganalisis nilai minimum *span* pada graf *dumbbell*. Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari 2 graf siklus C_m dan C_l yang dihubungkan dengan sebuah graf lintasan P_n dengan kedua titik ujung graf lintasan P_n adalah salah satu titik dari masing-masing graf siklus. Graf *dumbbell* dinotasikan dengan $D_{m,l,n}$ dengan $m, l \geq 3$ menyatakan banyaknya titik pada kedua graf siklus dan $n \geq 2$ menyatakan banyaknya titik pada graf lintasan (Wang et al., 2010). Sebelum membahas lebih lanjut, peneliti menyajikan beberapa lemma yang digunakan dalam artikel ini.

Lemma 1. (Lum, 2007)
Jika H adalah sebuah subgraf dari G, maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

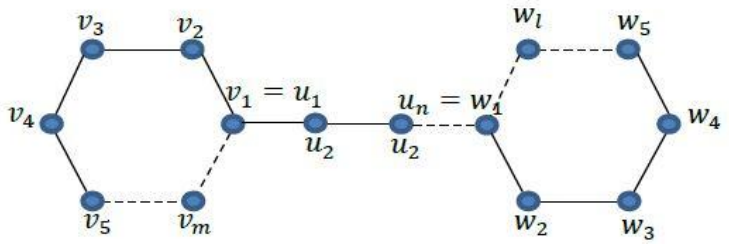
Lemma 2. (Griggs & Yeh, 1992)
Misalkan C_n adalah sebuah graf siklus dengan $n \geq 3$, maka $\lambda_{2,1}(C_n) = 4$.

Penelitian ini bersifat eksploratif, dengan tujuan untuk memberikan kontribusi baru dalam bentuk wawasan tambahan serta memperkaya kajian literatur di bidang pelabelan graf. Untuk memperoleh nilai minimum *span* dari suatu graf, penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan sebagai berikut:

a. Melakukan studi pustaka dari berbagai referensi seperti jurnal ilmiah, buku, maupun sumber relevan lainnya yang membahas pelabelan $L(2,1)$.
b. Menetapkan jenis graf yang akan dianalisis nilai minimum spannya yang dalam hal ini adalah graf *dumbbell.*
c. Memberikan notasi pada titik dan sisi graf, kemudian melakukan percobaan pelabelan $L(2,1)$ pada graf-graf yang telah ditentukan, serta menganalisis hasilnya menggunakan pendekatan deskriptif aksiomatik dan identifikasi pola.
d. Pola-pola pelabelan yang berhasil ditemukan selanjutnya dirumuskan dalam bentuk teorema, yang kemudian disertai dengan pembuktiannya.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, dibahas bagaimana cara mencari nilai minimal *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dumbbell $D_{m,l,n}$ Penotasian titik dan sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ yaitu $V(D_{m,l,n}) = \{x_i | i = 1,2,3,\dots,m\} \cup \{y_j | j = 1,2,3,\dots,n\} \cup \{z_k | k = 1,2,3,\dots,l\}$ dan $E(D_{m,l,n}) = \{x_i x_{i+1} | i = 1,2,3,\dots,m-1\} \cup \{x_1 y_1\} \cup \{y_j y_{j+1} | j = 1,2,3,\dots,n-1\} \cup \{y_n z_1\} \cup \{z_k z_{k+1} | k = 1,2,3,\dots,l-1\}$. Gambar 1 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$.



Gambar 1. Penotasian titik dan sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ (Wang et al., 2010)

Lemma 3. Untuk sebarang graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ dengan $m, l \geq 3$ dan $n \geq 2, \lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$.
Bukti. Pandang bahwa graf siklus C_n adalah subgraf dari graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq \lambda_{2,1}(C_n) = 4$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$. ■

Dalam artikel ini, penulis belum mendapatkan pola pelabelan pada graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ secara umum, sehingga dalam artikel ini diberikan beberapa proposisi pelabelan $L(2,1)$ pada graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ dengan order tertentu.

Proposisi 1. Untuk sebarang graf graf *dumbbell* $D_{4,4,n}$ dengan $n \equiv 1 \ mod\ 3$, $\lambda_{2,1}(D_{4,4,n}) = 4$
Bukti. Akan ditunjukkan $\lambda_{2,1}(D_{4,4,n}) \geq 4$. Berdasarkan Lemma 3 terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$. Selanjutnya akan dibuktikan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$.yaitu dengan membangun pelabelan $L(2,1)$ dari graf *dumbbell* $D_{4,4,n}$. Definisikan fungsi $f: V(D_{4,4,n}) \rightarrow \{0,1,3,4\}$ sebagai berikut.

$$f(x_i) = \begin{cases} 0;\ i = 1, \\ 3;\ i = 2, \\ 1;\ i = 3, \\ 4;\ i = 4. \end{cases}$$

$$f(z_k) = \begin{cases} 4;\ k = 1, \\ 0;\ k = 2, \\ 3;\ k = 3, \\ 1;\ k = 4. \end{cases}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 2;\ j \equiv 1\ mod\ 3, \\ 4;\ j \equiv 2\ mod\ 3, \\ 0;\ j \equiv 0\ mod\ 3. \end{cases}$$

Berdasarkan kaidah pelabelan $L(2,1)$, titik yang berjarak satu harus memiliki mutlak selisih label minimal dua. Hal tersebut akan ditunjukkan sebagai berikut.

a. Selisih label titik x_1 dengan x_2
   $|f(x_1) - f(x_2)| = |0 - 3| \geq 2$
b. Selisih label titik x_2 dengan x_3
   $|f(x_2) - f(x_3)| = |3 - 1| \geq 2$
c. Selisih label titik x_3 dengan x_4
   $|f(x_3) - f(x_4)| = |1 - 4| \geq 2$
d. Selisih label titik x_4 dengan x_1
   $|f(x_4) - f(x_1)| = |4 - 0| \geq 2$
e. Selisih label titik x_1 dengan y_j
   $|f(x_1) - f(y_j)| = |0 - 2| \geq 2$
f. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 1\ mod\ 3$ dengan y_{j+1}
   $|f(y_j) - f(y_{\{j+1\}})| = |2 - 4| \geq 2$
g. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 2\ mod\ 3$ dengan y_{j+1}
   $|f(y_j) - f(y_{\{j+1\}})| = |4 - 0| \geq 2$
h. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 0\ mod\ 3$ dengan y_{j+1}
   $|f(y_j) - f(y_{\{j+1\}})| = |0 - 2| \geq 2$
i. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 1\ mod\ 3$ dengan z_1
   $|f(y_j) - f(z_1)| = |2 - 4| \geq 2$
j. Selisih label titik z_1 dengan z_2
   $|f(z_1) - f(z_2)| = |4 - 0| \geq 2$
k. Selisih label titik z_2 dengan z_3
   $|f(z_2) - f(z_3)| = |0 - 3| \geq 2$
l. Selisih label titik z_3 dengan z_4
   $|f(z_3) - f(z_4)| = |3 - 1| \geq 2$
m. Selisih label titik z_4 dengan z_1
   $|f(z_4) - f(z_1)| = |1 - 4| \geq 2$

Selain itu, menurut kaidah pelabelan $L(2,1)$ titik yang berjarak dua juga harus memiliki mutlak selisih label minimal satu. Hal tersebut akan ditunjukan sebagai berikut:

a. Selisih label titik x_1 dengan x_3
   $|f(x_1) - f(x_3)| = |0 - 1| \geq 1$
b. Selisih label titik x_2 dengan x_4
   $|f(x_2) - f(x_4)| = |3 - 4| \geq 1$

c. Selisih label titik x_1 dengan y_j
$|f(x_1) - f(y_j)| = |0 - 4| \geq 1$
d. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 1 \, mod \, 3$ dengan y_{j+2}
$|f(y_j) - f(y_{\{j+2\}})| = |2 - 0| \geq 1$
e. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 2 \, mod \, 3$ dengan y_{j+2}
$|f(y_j) - f(y_{\{j+2\}})| = |4 - 2| \geq 1$
f. Selisih label titik y_j untuk $j \equiv 0 \, mod \, 3$ dengan y_{j+2}
$|f(y_j) - f(y_{\{j+2\}})| = |0 - 4| \geq 1$
g. Selisih label titik y_j untuk $j = l$ dengan z_2
$|f(y_j) - f(z_2)| = |2 - 0| \geq 1$
h. Selisih label titik y_j untuk $j = l$ dengan z_4
$|f(y_j) - f(z_4)| = |2 - 1| \geq 1$
i. Selisih label titik z_1 dengan z_3
$|f(z_1) - f(z_3)| = |4 - 3| \geq 1$
j. Selisih label titik z_2 dengan z_4
$|f(z_2) - f(z_4)| = |0 - 1| \geq 1$

Dapat dibuktikan bahwa fungsi f memenuhi syarat pelabelan $L(2,1)$ dengan nilai minimal *span* adalah 4. Oleh karena itu, $\lambda_{2,1}(D_{4,4,n}) \leq 4$. Berdasarkan pembuktian di atas didapat $\lambda_{2,1}(D_{4,4,n}) \geq 4$ dan$\lambda_{2,1}(D_{4,4,n}) \leq 4$, sehingga $\lambda_{2,1}(D_{4,4,n}) = 4$ dengan $n \equiv 1 \, mod \, 3$.

Proposisi 2. Untuk sebarang graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ dengan $m, l \equiv 0 \, mod \, 3$ dan $n \equiv 2 \, mod \, 4$, $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) = 4$

Bukti. Dengan cara yang sama, berdasarkan Lemma 3 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$. Selanjutnya akan dibuktikan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$ yaitu dengan membangun pelabelan $L(2,1)$ dari graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$. Definisikan fungsi $f: V(D_{m,l,n}) \rightarrow \{0, 1, 3, 4\}$ sebagai berikut.

$$f(x_i) = \begin{cases} 0; \ i \equiv 1 \, mod \, 3, \\ 2; \ i \equiv 2 \, mod \, 3, \\ 4; \ i \equiv 0 \, mod \, 3, \end{cases}$$

$$f(z_k) = \begin{cases} 4; \ k \equiv 1 \, mod \, 3, \\ 0; \ k \equiv 2 \, mod \, 3, \\ 2; \ k \equiv 0 \, mod \, 3, \end{cases}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 3; \ j \equiv 1 \, mod \, 4, \\ 1; \ j \equiv 2 \, mod \, 4, \\ 4; \ j \equiv 3 \, mod \, 4, \\ 0; \ j \equiv 0 \, mod \, 4, \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label minimal dua dan setiap titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal dua. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$. Karena $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$ dan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$, maka $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) = 4$ dengan $m, l \equiv 0 \, mod \, 3$ dan $n \equiv 2 \, mod \, 4$. ■

Proposisi 3. Untuk sebarang graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ dengan $m, l \equiv 1 \, mod \, 3$ dan $n \equiv 2 \, mod \, 4$, $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) = 4$

Bukti. Dengan cara yang sama, berdasarkan Lemma 3 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$. Selanjutnya akan dibuktikan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$ yaitu dengan membangun pelabelan $L(2,1)$ dari graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$. Definisikan fungsi $f: V(D_{m,l,n}) \rightarrow \{0,1,3,4\}$ sebagai berikut.

$$f(x_i) = \begin{cases} 0;\ i \equiv 1\ mod\ 3 \text{ dan } i \neq m, \\ 2;\ i \equiv 2\ mod\ 3 \text{ dan } i \neq m-2, \\ 4;\ i \equiv 0\ mod\ 3 \text{ dan } i \neq m-1, \\ 3; i = m-2, \\ 1; i = m-1, \\ 4; i = m. \end{cases}$$

$$f(z_k) = \begin{cases} 4; k = 1, \\ 0; k = 2, \\ 3; k = 3, \\ 1; k = 4, \\ 2;\ k \equiv 1\ mod\ 3, \\ 4;\ k \equiv 2\ mod\ 3, \\ 0;\ k \equiv 0\ mod\ 3, \end{cases}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 3;\ j \equiv 1\ mod\ 4, \\ 1;\ j \equiv 2\ mod\ 4, \\ 4;\ j \equiv 3\ mod\ 4, \\ 0;\ j \equiv 0\ mod\ 4, \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label minimal dua dan setiap titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal dua. Sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$. Karena $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$ dan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$, maka $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) = 4$ dengan $m, l \equiv 1\ mod\ 3$ dan $n \equiv 2\ mod\ 4$. ■

Proposisi 4. Untuk sebarang graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$ dengan $m, l \equiv 2\ mod\ 3$ dan $n \equiv 0\ mod\ 3$, $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) = 4$

Bukti. Dengan cara yang sama, berdasarkan Lemma 3 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$. Selanjutnya akan dibuktikan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$ yaitu dengan membangun pelabelan $L(2,1)$ dari graf *dumbbell* $D_{m,l,n}$. Definisikan fungsi $f: V(D_{m,l,n}) \rightarrow \{0,1,3,4\}$ sebagai berikut.

$$f(x_i) = \begin{cases} 0;\ i \equiv 1\ mod\ 3 \text{ dan } i \neq m-1, \\ 2;\ i \equiv 2\ mod\ 3 \text{ dan } i \neq m, \\ 4; i \equiv 0\ mod\ 3, \\ 1; i = m-1, \\ 3; i = m. \end{cases}$$

$$f(z_k) = \begin{cases} 4; k = 1, \\ 1; k = 2, \\ 3; k = 3, \\ 0;\ k \equiv 1\ mod\ 3, \\ 2;\ k \equiv 2\ mod\ 3, \\ 4;\ k \equiv 0\ mod\ 3, \end{cases}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 4;\ j \equiv 1\ mod\ 3, \\ 2;\ j \equiv 2\ mod\ 3, \\ 0;\ j \equiv 0\ mod\ 3, \end{cases}$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label minimal dua dan setiap titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal dua. Sehingga

terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$. Karena $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \geq 4$ dan $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) \leq 4$, maka $\lambda_{2,1}(D_{m,l,n}) = 4$ dengan $m, l \equiv 2 \; mod \; 3$ dan $n \equiv 0 \; mod \; 3$. ■

4 KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menentukan nilai minimum span dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *dumbbell*, yaitu graf yang dibentuk dari dua graf siklus yang dihubungkan oleh graf lintasan. Berdasarkan analisis dan konstruksi pelabelan yang dilakukan, diperoleh bahwa nilai minimum *span* dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *dumbbell* untuk beberapa variasi order adalah sebesar 4. Pembuktian dilakukan dengan pendekatan deskriptif aksiomatik dan identifikasi pola pelabelan yang memenuhi syarat, yaitu setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label minimal dua, dan setiap titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu. Hasil ini memperkuat temuan sebelumnya terkait nilai span minimum pada beberapa kelas graf sederhana, serta memberikan kontribusi baru dalam kajian pelabelan graf, khususnya untuk graf dengan struktur kompleks seperti graf *dumbbell*. Peneliti lain dapat mengembangkan pelabelan $L(2,1)$ pada graf *dumbbell* pada order yang lainnya.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan dalam penyusunan jurnal ini. Terutama kepada dosen pembimbing dan para pengulas yang telah memberikan masukan, arahan, serta koreksi yang sangat berharga dalam penyempurnaan tulisan ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada lembaga pendidikan tempat penulis menempuh studi yang telah menyediakan fasilitas dan sumber daya yang menunjang proses penelitian, serta kepada rekan-rekan sejawat yang telah memberikan semangat dan diskusi yang konstruktif selama proses penyusunan karya ini. Tak lupa, apresiasi diberikan kepada para peneliti terdahulu yang karya-karyanya menjadi dasar rujukan dan inspirasi dalam pengembangan kajian pelabelan $L(2,1)$. Semoga penelitian ini dapat memberikan kontribusi positif dalam pengembangan ilmu matematika, khususnya dalam bidang teori graf.

DAFTAR PUSTAKA

Aminulloh, M., & Afif, R. (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi L (2, 1) pada graf petersen P (n, 1)* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press, Surabaya.

Chartrand, G. & P. Zhang. (2019). *Chromatic Graph Theory*. Florida: CRC press.

Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan L (2, 1) pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, *13*(2). https://core.ac.uk/reader/290089130

Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, *6*(25), 4-623. Article DS6. https://doi.org/10.37236/11668

Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *5*(4), 586-595. https://doi.org/10.1137/0405048

Hale, W. K. (1980). Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, *68*(12), 1497-1514. https://doi.org/10.1109/PROC.1980.11899

Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on*

Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021) (pp. 35-39). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008

Julaeha, S., Luspitasari, I., & Sukaesih, E. (2017). Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Bunga. *Jurnal Istek*, *10*(1), 83-101. https://journal.uinsgd.ac.id/index.php/istek/article/view/1458/1021

Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prossiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999

Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009

Kumar, A., & Vats, A. K. (2020). Application of graph Labeling in Crystallography. *Proc. Mater. Today*. 1-5. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.09.371

Lum, A. (2007). Upper Bound on L(2,1)-labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ. Retrieved from https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf

Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, *7*(1), 139-145. http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf

Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, *3*(1), 14-23. http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2

Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan L(2,1) pada Graf Sierpinski S(n,k). *Karismatika*, 3(2), 130-139.

Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The L (2, 1)-labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, *21*(1), 37-41. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029

Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). L (2, 1) Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010

Vinutha, M. S., & Arathi, P. (2017). Applications of graph coloring and labeling in computer science. *International Journal on Future Revolution in Computer Science and Communication Engineering*, *3*(8), 14-16. https://www.researchgate.net/publication/353285499_Applications_of_Graph_Coloring_and_Labeling_in_Computer_Science

Wang, J., Belardo, F., Huang, Q., & Marzi, E. M. L. (2010). Spectral characterizations of dumbbell graphs. *the electronic journal of combinatorics*. *17*(1), 1-16. http://ftp.gwdg.de/pub/EMIS/journals/EJC/Volume_17/PDF/v17i1r42.pdf