

PELABELAN TITIK SISI PRIMA PADA GRAF UNICYCLIC

Hafif Komarullah^{1*}, Muhammad Makhrus Muzakki²

^{1,2}Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

*Penulis korespondensi: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Pelabelan titik-sisi prima merupakan salah satu bentuk pelabelan graf yang memberikan bilangan bulat positif berbeda pada setiap titik dan sisi graf sehingga untuk setiap sisi yang menghubungkan dua titik, ketiga label tersebut saling relatif prima. Penelitian ini mengkaji keberadaan pelabelan tersebut pada tiga kelas graf *unicyclic* yaitu graf kecebong, graf gunung api, dan graf pot bunga yang masing-masing memiliki satu siklus dengan struktur cabang berbeda. Pendekatan analitis deduktif digunakan untuk menyusun konstruksi pelabelan yang sesuai dengan struktur tiap graf, kemudian diverifikasi melalui sifat-sifat dasar teori bilangan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketiga graf tersebut memenuhi syarat pelabelan titik-sisi prima melalui konstruksi pelabelan yang valid dan konsisten. Temuan ini memperluas kajian pelabelan titik-sisi prima pada graf *unicyclic* serta memberikan dasar teoretis bagi pengembangan penelitian lanjutan.

Kata kunci: graf *unicyclic*, pelabelan titik-sisi prima, relatif prima.

1 PENDAHULUAN

Matematika merupakan disiplin ilmu yang bersifat universal dan fundamental, berperan signifikan dalam berbagai cabang pengetahuan serta dalam pembentukan pola pikir manusia (Komarullah & Zhahra, 2023). Teori graf merupakan salah satu bidang penting dalam matematika diskrit yang memiliki peran besar dalam pemodelan berbagai sistem nyata, seperti jaringan komputer (Majeed & Rauf, 2020), struktur molekul (Mercado dkk., 2021), transportasi (Zhang dkk., 2013), hingga analisis hubungan sosial (Pattabiraman & Parvathi, 2018). Pelabelan graf muncul sebagai cabang kajian yang memberikan penomoran pada titik atau sisi graf dengan aturan tertentu untuk menghasilkan struktur numerik yang bermakna (Gallian, 2022). Salah satu bentuk pelabelan yang terus berkembang adalah pelabelan berbasis sifat relatif prima, terutama karena memiliki keterkaitan dengan teori bilangan dan potensi aplikasi dalam kehidupan sehari-hari.

Pelabelan prima diperkenalkan oleh Entringer melalui pemberian bilangan pada titik graf sehingga setiap dua titik bertetangga memiliki label yang saling relatif prima (Tout dkk., 1982). Dalam perkembangannya, konsep ini diperluas menjadi pelabelan yang melibatkan titik dan sisi sekaligus, salah satunya adalah pelabelan titik-sisi prima sebagaimana dikaji oleh Jagadeesh & Babujee (2017). Pelabelan titik-sisi prima didefinisikan oleh fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ yang memastikan bahwa untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, pasangan bilangan $f(u)$, $f(v)$, dan $f(uv)$ saling relatif prima. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan titik-sisi prima disebut graf titik-sisi prima.

Berbagai penelitian terdahulu telah mengkaji pelabelan titik-sisi prima pada sejumlah kelas graf, mencakup graf lintasan, graf siklus, dan graf bintang (Jagadeesh & Babujee, 2017), serta graf roda, graf kipas, dan graf persahabatan (Parmar, 2017). Kajian lain juga meliputi graf kupu-kupu dan graf Jahangir (Simaringa & Muthukumaran, 2019a). Uraian yang lebih luas mengenai perkembangan topik ini dapat ditemukan pada beberapa studi lanjutan (Parmar, 2018; Shrimali &

Parmar, 2019; Simaringa & Muthukumaran, 2019b; Shrimali & Parmar, 2020). Kelas graf *unicyclic* menawarkan karakteristik yang menarik karena hanya memiliki satu siklus dan dapat dikombinasikan dengan berbagai bentuk cabang. Struktur ini memungkinkan adanya variasi pola pelabelan yang lebih kompleks dibandingkan graf pohon, tetapi tetap memiliki keteraturan yang dapat dimanfaatkan dalam menyusun konstruksi pelabelan. Informasi mengenai pelabelan titik-sisi prima pada graf *unicyclic* masih terbatas, terutama pada graf-graf yang menggabungkan satu siklus dengan beberapa bentuk ekstensi seperti lintasan, titik daun, dan cabang bertingkat.

Penelitian ini mengkaji tiga kelas graf *unicyclic*, yaitu graf kecebong, graf gunung api, dan graf pot bunga. Setiap graf memiliki struktur berbeda yang berpotensi menghasilkan pola pelabelan yang unik. Fokus penelitian diarahkan pada perancangan fungsi pelabelan titik-sisi prima yang sesuai dengan karakteristik tiap graf serta pembuktian keberadaannya secara matematis. Tujuan penelitian adalah menunjukkan bahwa ketiga graf tersebut termasuk dalam kategori graf titik-sisi prima dan menyediakan konstruksi pelabelan yang dapat digeneralisasikan pada graf *unicyclic* lain dengan struktur serupa.

2 METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan analitis-deduktif untuk menyusun dan membuktikan pelabelan titik-sisi prima pada tiga graf *unicyclic*. Langkah-langkah penelitian dirumuskan sebagai berikut.

- a. Identifikasi struktur graf
Menentukan orde, ukuran, dan penentuan himpunan titik dan sisi pada graf kecebong, graf gunung api, dan graf pot bunga.
- b. Penetapan himpunan label
Menentukan himpunan bilangan bulat positif berbeda berjumlah $(|V(G)| + |E(G)|)$ sebagai ruang label untuk titik dan sisi.
- c. Perancangan konstruksi pelabelan
Menyusun fungsi pelabelan yang memenuhi syarat pelabelan titik-sisi prima.
- d. Verifikasi Sifat Relatif Prima
Memeriksa setiap pasangan titik dan sisi yang bertetangga menggunakan sifat bilangan berurutan serta lemma dasar teori bilangan. Lemma yang digunakan untuk membuktikan dua bilangan relatif prima sebagai berikut.
Lemma 1. (Komarullah dkk., 2024) Misalkan a adalah bilangan ganjil. Jika $b \in \mathbb{Z}^+$ tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berlaku $\gcd(a, a + b) = 1$.
Lemma 2. (Sukirman, 2016) Untuk setiap dua bilangan bulat berurutan a dan $a + 1$, berlaku bahwa $\gcd(a, a + 1) = 1$.
Lemma 3 (Sukirman, 2016) Dua bilangan $a, b \in \mathbb{Z}$ merupakan saling relatif prima jika terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga memenuhi persamaan Bézout $ax + by = 1$.
- e. Generalisasi Pola Pelabelan
Menganalisis kesesuaian pola pelabelan untuk graf *unicyclic* dengan orde atau jumlah cabang yang diperbesar, sehingga diperoleh konstruksi yang bersifat umum.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan konstruksi pelabelan titik-sisi prima pada tiga kelas graf *unicyclic* yang menjadi objek penelitian, yaitu graf kecebong, graf gunung api, dan graf pot bunga. Setiap graf dianalisis berdasarkan struktur dasarnya untuk menentukan pola pemberian label yang memenuhi ketentuan relatif prima pada seluruh pasangan titik dan sisi yang saling berkaitan.

Konstruksi pelabelan disesuaikan dengan karakteristik masing-masing graf, terutama susunan siklus dan konfigurasi cabang yang memengaruhi strategi penomoran. Pembahasan dilengkapi dengan verifikasi matematis yang menunjukkan bahwa seluruh label yang digunakan menghasilkan pasangan bilangan yang saling relatif prima sehingga memenuhi definisi pelabelan titik-sisi prima.

a. Graf kecebong

Graf kecebong dengan order dan ukuran $m + n$ dinotasikan dengan $T_{m,n}$ adalah graf yang dibangun dari graf siklus C_m dan graf lintasan P_{n+1} dengan menempelkan salah satu titik ujung graf lintasan (titik berderajat satu) dengan salah satu titik pada graf siklus.

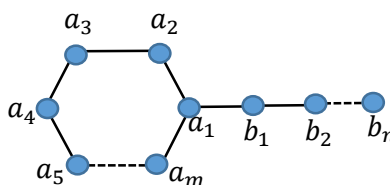
Teorema 1. Untuk setiap $m \geq 3$ dan $n \geq 1$, Graf kecebong $T_{m,n}$ adalah graf titik-sisi prima.

Bukti. Langkah pertama yaitu melakukan penotasian titik dan sisi pada graf kecebong. Himpunan titik dan sisi dari graf kecebong dinotasikan sebagai berikut.

$$V(T_{m,n}) = \{a_i; i \in [1, m]\} \cup \{b_j; j \in [1, n]\}$$

$$E(T_{m,n}) = \{a_1a_m, a_ia_{i+1}; i \in [1, m-1]\} \cup \{a_1b_1\} \cup \{b_ib_{i+1}; i \in [1, n-1]\}$$

Gambar 1 adalah contoh graf kecebong.



Gambar 1. Graf kecebong

Langkah kedua untuk menunjukkan bahwa graf kecebong adalah graf titik-sisi prima yaitu dengan mengkontruksi fungsi yang memenuhi aturan pelabelan titik-sisi prima. didefinisikan oleh fungsi $f: V(T_{m,n}) \cup E(T_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(m+n)\}$ sebagai berikut.

$$f(a_i) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, m.$$

$$f(b_j) = 2(m+j) - 1; j = 1, 2, \dots, n.$$

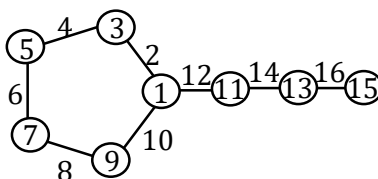
$$f(a_ia_{i+1}) = 2i; i = 1, 2, \dots, m-1.$$

$$f(a_ma_1) = 2m.$$

$$f(a_1b_1) = 2m+2.$$

$$f(b_jb_{j+1}) = 2(m+j+1); j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Misalkan disajikan contoh pelabelan titik-sisi prima pada graf kecebong $T_{5,3}$ yang disajikan pada Gambar 2.

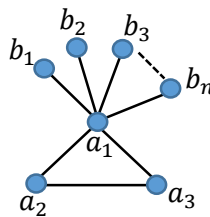


Gambar 2. Pelabelan titik-sisi prima pada graf kecebong $T_{5,3}$

Dengan mudah dapat diverifikasi bahwa untuk setiap dua titik bertetangga dan satu sisi yang menghubungkannya memiliki pasangan label yang saling relatif prima. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi aturan pelabelan titik-sisi prima, sehingga dapat disimpulkan bahwa graf kecebong adalah graf titik-sisi prima. ■

b. Graf gunung api

Graf gunung api berorder dan berukuran $n + 3$ dinotasikan dengan V_n adalah graf yang dibangun dari graf siklus C_3 dan graf bintang S_n dengan menempelkan titik pusat graf bintang (titik berderajat n ke salah satu titik dari graf siklus. Graf gunung api memiliki himpunan titik $V(V_n) = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{b_j; j \in [1, n]\}$ dan himpunan sisi $E(V_n) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1\} \cup \{a_1b_j; j \in [1, n]\}$. Contoh dari graf gunung api yang telah dinotasikan titik dan sisinya dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf gunung api

Teorema 2. Untuk setiap $n \geq 1$, graf gunung api V_n adalah graf titik-sisi prima.

Bukti. Dengan cara yang sama untuk membuktikan graf gunung api merupakan titik-sisi prima yaitu dengan mengkontruksi fungsi pada graf gunung api yang memerhatikan syarat pelabelan titik-sisi prima. Definisikan fungsi bijektif f dengan $f: V(V_n) \cup E(V_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(n + 3)\}$ sebagai berikut.

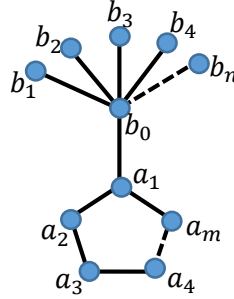
$$\begin{aligned} f(a_i) &= 2i - 1; i = 1, 2, 3. \\ f(b_j) &= 2j + 5; j = 1, 2, \dots, n. \\ f(a_i a_{i+1}) &= 2i; i = 1, 2. \\ f(a_3 a_1) &= 6. \\ f(a_1 b_j) &= 2j + 6; j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa label pada siklus C_3 konsekutif dan $a_1 = 1$ relatif prima dengan semua bilangan, sehingga label pada siklus C_3 semua label terkait saling relatif prima. Selanjutnya label titik a_1 dan titik b_j serta titik a_1 dan sisi $a_1 b_j$ untuk $j = 1, 2, \dots, m$ relatif prima karena $a_1 = 1$ relatif prima dengan semua bilangan. Label sisi $a_1 b_j$ dan titik b_j untuk $j = 1, 2, \dots, m$ relatif prima karena konsekutif. Jelas bahwa fungsi f memenuhi aturan pelabelan titik-sisi prima, sehingga terbukti bahwa graf gunung api adalah graf titik-sisi prima. ■

c. Graf pot bunga

Graf pot bunga dinotasikan dengan $C_m - S_n$ adalah graf dengan order dan ukuran $m + n + 1$ yang dibangun dari menggabungkan graf bintang S_n dan graf siklus C_m dengan sebuah sisi yang salah satu ujungnya ditempelkan pada titik pusat graf bintang dan ujung lainnya pada salah satu titik graf siklus. Graf pot bunga memiliki himpunan titik $V(C_m - S_n) = \{a_i; i \in [1, m]\} \cup \{b_j; j \in$

$[0, n]$ dan himpunan sisi $E(C_m - S_n) = \{a_1a_m, a_ia_{i+1}; i \in [1, m-1]\} \cup \{a_1b_0\} \cup \{b_0b_j; j \in [1, n]\}$. Gambar 4 adalah contoh dari graf pot bunga dan penotasian titik serta sisinya.



Gambar 3. Graf pot bunga

Teorema 3. Untuk setiap $m \geq 3$ dan $n \geq 1$, graf pot bunga $C_m - S_n$ adalah graf titik-sisi prima.

Bukti. Dengan metode serupa, pembuktian bahwa graf pot bunga termasuk dalam kelas graf titik-sisi prima dilakukan dengan menyusun suatu fungsi pelabelan yang memenuhi ketentuan pelabelan titik-sisi prima pada graf tersebut. Ditetapkan sebuah fungsi bijektif $: V(C_m - S_n) \cup E(C_m - S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(m+n+1)\}$ sebagai berikut, yang didefinisikan sebagai berikut.

a. Kasus $m \equiv 0 \pmod 3$

$$\begin{aligned} f(a_i) &= 2i + 1; i = 1, 2, \dots, m. \\ f(b_j) &= \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 2(m+j) + 1; j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \\ f(a_ia_{i+1}) &= 2i + 2; i = 1, 2, \dots, m-1. \\ f(a_1a_m) &= 2m + 2. \\ f(a_1b_0) &= 2. \\ f(b_0b_j) &= 2(m+j+1); j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

b. Kasus $m \equiv 1 \pmod 3$

$$\begin{aligned} f(a_i) &= \begin{cases} 2i + 1; i = 1, 2, \dots, m-1, \\ 2m + 3; i = m. \end{cases} \\ f(b_j) &= \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 2m + 1 & ; j = 1, \\ 2(m+j) + 1; j = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \\ f(a_ia_{i+1}) &= 2i + 2; i = 1, 2, \dots, m-1. \\ f(a_1a_m) &= 2m + 6. \\ f(a_1b_0) &= 2. \\ f(b_0b_j) &= \begin{cases} 2m + 2 & ; j = 1, \\ 2m + 4 & ; j = 2, \\ 2(m+j+1); j = 3, 4, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

c. Kasus $m \equiv 2 \pmod 3$

$$\begin{aligned} f(a_i) &= 2i + 1; i = 1, 2, \dots, m. \\ f(b_j) &= \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 2(m+j) + 1; j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \\ f(a_ia_{i+1}) &= 2i + 2; i = 1, 2, \dots, m-1. \\ f(a_1a_m) &= 2m + 4. \\ f(a_1b_0) &= 2. \end{aligned}$$

$$f(b_0b_j) = \begin{cases} 2m + 2 & ; j = 1, \\ 2(m + j + 1) & ; j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

Melalui pemeriksaan yang cermat, dapat dipastikan bahwa setiap pasangan titik yang bertetangga pada graf, beserta sisi yang menghubungkan keduanya, memperoleh label yang saling relatif prima. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terdapat titik maupun sisi yang melanggar ketentuan dasar pelabelan titik-sisi prima, yakni keharusan bahwa label pada elemen-elemen yang saling bersinggungan harus memiliki nilai yang relatif prima. Berdasarkan verifikasi tersebut, fungsi f terbukti memenuhi seluruh syarat pelabelan titik-sisi prima secara konsisten pada seluruh struktur graf. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa graf kecebong memenuhi karakteristik graf titik-sisi prima dan secara formal termasuk dalam kelas graf tersebut. ■

4 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan verifikasi terhadap konstruksi pelabelan pada tiga kelas graf *unicyclic* yang dikaji, dapat disimpulkan bahwa masing-masing graf yaitu graf kecebong, graf gunung api, dan graf pot bunga memenuhi syarat untuk diberi pelabelan titik-sisi prima. Setiap graf berhasil dibangun fungsi pelabelan bijektif yang memastikan bahwa label pada dua titik bertetangga dan sisi penghubungnya selalu saling relatif prima. Keberhasilan konstruksi pada seluruh kelas graf tersebut menegaskan bahwa pelabelan titik-sisi prima tidak hanya berlaku pada graf-graf sederhana, tetapi juga dapat diterapkan pada graf *unicyclic* dengan struktur cabang yang beragam. Temuan ini menguatkan landasan teoretis dalam kajian pelabelan graf serta membuka peluang eksplorasi lebih lanjut terhadap kelas graf lain dengan karakteristik struktural yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of combinatorics*. Vol. 6 (25), pp: 4-623.
- Jagadeesh, R., & Babujee, J. B. (2017). On edge vertex prime labeling. *International journal of pure and applied mathematics*, 114(6), 209-218.
- Komarullah, H., & Zhahra, M. A. Al. (2023). Pemanfaatan Plotagon sebagai Media Pembelajaran Matematika FPB dan KPK. *Prosiding Seminar Nasional Ilmu Pendidikan*, 2(1), 71–75.
- Komarullah, H., Slamin, S., & Wijaya, K. (2024). Pelabelan Koprime Pada Amalgamasi Graf Lengkap dan Graf Berlian. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. 21(1), 1-12
- Majeed, A., & Rauf, I. (2020). Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks. *Inventions*, 5(1), 1-39. <https://doi.org/10.3390/inventions5010010>.
- Mercado, R., Rastemo, T., Lindelöf, E., Klambauer, G., Engkvist, O., Chen, H., & Bjerrum, E. J. (2021). Graph networks for molecular design. *Machine Learning: Science and Technology*, 2(2), 1-38. <https://doi.org/10.1088/2632-2153/abcf91>.
- Pattabiraman, V., & Parvathi, R. (2018). Social network analysis using graph theory. *International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra*, 27(1), 45-65.
- Parmar, Y. M. (2017). Edge vertex prime labeling for wheel, fan and friendship graph. *International Journal of Mathematics and Statistics vention (IJMSI)*, 5(8), 23-29.
- Parmar, Y. M. (2018). Edge Vertex Prime Labeling for K_2, n and K_3, n Graphs. *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*, 6(2), 167-180.
- Simaringa, M., & Muthukumaran, S. (2019a). Edge vertex prime labeling of some graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 7(2), 1-10.

- Simaringa, M., & Muthukumaran, S. (2019b). Edge vertex prime labeling of graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 7(3), 572-578.
- Shrimali, N. P., & Parmar, Y. M. (2019). Edge vertex prime labeling for some trees. *Journal of Applied Science and Computations*, 6(1), 1236-1249.
- Shrimali, N. P., & Parmar, Y. M. (2020). Edge vertex prime labeling for some graphs. *South East Asian Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, 16(1). 149-156.
- Tout, R., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *National Academy Science Letters-India*, 5(11), 365-368.
- Sukirman. (2016). *Teori Bilangan, 1st ed.* Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.
- Zhang, L., Ma, X., Wang, H., Feng, M., & Xue, S. (2013). Modelling and optimisation on bus transport system with graph theory and complex network. *International journal of computer applications in technology*, 48(1), 83-92. <https://doi.org/10.1504/IJCAT.2013.055569>.