

PELABELAN $L(2, 1)$ PADA GRAF BUNGA *DOUBLE QUADRILATERAL* DAN GRAF KINCIR ANGIN *DOUBLE QUADRILATERAL*

Hafif Komarullah^{1*}, Maura Delva Saputri², Finka Afdhilatul Jannah Im³

^{1,2,3}Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

*Penulis korespondensi: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Pelabelan $L(2,1)$ merupakan skema pelabelan graf yang memberikan selisih label minimal 2 pada simpul yang bertetangga dan minimal 1 pada simpul yang berjarak dua. Kajian ini penting karena berkaitan dengan optimasi alokasi frekuensi dan pengurangan interferensi pada jaringan komunikasi. Penelitian ini bertujuan menentukan span minimum pelabelan $L(2,1)$ pada graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k). Metode yang digunakan adalah analisis teoritik melalui konstruksi pola pelabelan dan pembuktian deduktif berdasarkan struktur graf. Hasil penelitian menunjukkan bahwa span minimum pada FDQ_k adalah $2k + 2$, sedangkan pada DQ_k adalah $3k + 1$.

Kata kunci: pelabelan $L(2,1)$, span minimum, graf bunga, graf kincir angin, *double quadrilateral*

1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang matematika yang memiliki berbagai penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam praktiknya, suatu objek direpresentasikan sebagai simpul, sedangkan hubungan antarobjek digambarkan sebagai sisi. Cabang ilmu ini pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika ia menyelesaikan permasalahan Jembatan Königsberg. Masalah tersebut berkaitan dengan upaya membuktikan bahwa seseorang yang menelusuri seluruh jembatan dan kembali ke simpul awal tidak mungkin melintasi setiap jembatan tepat satu kali. Euler memformalkan masalah tersebut dengan merepresentasikan daratan sebagai simpul dan jembatan sebagai sisi (Swati & Tiwari, 2021). Keberhasilan ini menjadi tonggak awal perkembangan teori graf hingga mencapai bentuknya yang modern saat ini.

Salah satu bidang yang tumbuh pesat dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf didefinisikan sebagai pemetaan elemen-elemen pada graf ke bilangan bulat tidak negatif dengan memenuhi aturan tertentu. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Sadláček pada tahun 1963. Secara umum, pelabelan graf dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan simpul, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Gallian, 2022). Penerapan pelabelan graf memiliki manfaat signifikan, terutama dalam penentuan frekuensi pada sistem pemancar radio. Konsep pelabelan $L(2,1)$ menjadi salah satu fokus penting karena memberikan solusi terhadap permasalahan interferensi frekuensi pada jaringan komunikasi radio. Misalkan G merupakan graf sederhana dan terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G didefinisikan sebagai suatu fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ dengan ketentuan bahwa untuk setiap pasangan simpul $x, y \in V(G)$ berlaku syarat $|f(x) - f(y)| \geq 2$ apabila $d(x, y) = 1$ dan $|f(x) - f(y)| \geq 1$ apabila $d(x, y) = 2$ (Griggs & Yeh, 1992). Nilai k terbesar yang digunakan dalam himpunan label tersebut disebut sebagai span atau label maksimum yang muncul pada pelabelan $L(2,1)$. Karena suatu graf G dapat memiliki lebih dari satu kemungkinan nilai span, kajian ini memusatkan perhatian pada penentuan span minimum, yang dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Shao dkk., 2008).

Sejumlah studi terdahulu telah mengkaji berbagai kelas graf untuk menentukan nilai span minimum pada pelabelan $L(2,1)$. Pada graf siklus C_n dan graf lintasan P_n , telah diketahui bahwa keduanya mempunyai nilai span minimum sebesar 4. Sementara itu, untuk graf bintang S_n dan graf roda W_n , diperoleh nilai span minimum sebesar $n + 1$ (Griggs & Yeh, 1992). Penelitian yang dilakukan oleh Fatimah dkk. (2016) mengkaji span minimum pada graf teratai. Selain itu, graf Sierpinski $S_{n,m}$ untuk kasus $m = 2$ dan $m = 3$ juga memiliki span minimum yang sama, yakni 4 (Sagala & Susiana, 2017). Adapun graf lolipop $L_{m,n}$ dan graf pendulum P_n^k masing-masing memiliki span minimum sebesar $2m - 1$ dan $k + 1$ (Umam dkk., 2022). Selain itu, berbagai temuan lain terkait pelabelan $L(2,1)$ dapat ditemui pada penelitian Aminulloh & Afif (2019), Halikin & Komarullah (2022), Komarullah dkk. (2022), Komarullah (2023), serta Komarullah dkk. (2025a; 2025b).

Penelitian sebelumnya menunjukkan keberagaman karakteristik nilai span pada berbagai kelas graf. Hasil-hasil tersebut mengindikasikan bahwa struktur graf berpengaruh langsung terhadap pola pelabelan yang dapat dibangun. Ketertarikan terhadap kelas graf baru semakin meningkat seiring ditemukannya struktur graf dengan keteraturan tertentu yang berpotensi memberikan pola pelabelan optimal. Kelas graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) termasuk dalam kategori graf dengan struktur khas yang belum banyak dieksplorasi dalam literatur pelabelan $L(2,1)$.

Tujuan penelitian ini adalah mengkonstruksi pelabelan $L(2,1)$ pada graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) serta menentukan nilai span minimum dari masing-masing graf. Manfaat penelitian diharapkan terletak pada kontribusi teoretis terhadap pengembangan kajian pelabelan graf dan pemahaman lebih dalam mengenai sifat pelabelan $L(2,1)$ pada struktur graf dengan pola keterhubungan yang lebih kompleks.

2 METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan analisis teoritik yang bertujuan memperoleh nilai span minimum pelabelan $L(2,1)$ pada graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k). Tahap pertama penelitian dilakukan dengan mendeskripsikan struktur masing-masing graf secara formal melalui pendefinisian himpunan simpul, himpunan sisi, serta sifat-sifat keterhubungan yang relevan terhadap proses pelabelan. Selanjutnya, disusun konstruksi pola pelabelan $L(2,1)$ yang didasarkan jarak antar simpul. Setiap konstruksi pola pelabelan diverifikasi melalui pemeriksaan sistematis terhadap pemenuhan ketentuan pelabelan $L(2,1)$, yakni bahwa selisih label antar simpul yang bertetangga sekurang-kurangnya adalah 2, dan selisih label antar simpul yang berjarak dua sekurang-kurangnya adalah 1.

Untuk menentukan span minimum, penelitian menerapkan pembuktian deduktif yang meliputi dua jenis argumen. Pertama, pembuktian eksistensi (*upper bound*) dilakukan dengan menunjukkan bahwa pola pelabelan yang dikonstruksi menghasilkan span tertentu yang valid. Kedua, pembuktian batas bawah (*lower bound*) digunakan untuk memastikan bahwa tidak terdapat pelabelan lain yang mampu menghasilkan span lebih kecil dari nilai yang diperoleh. Kombinasi kedua pendekatan ini memberikan justifikasi formal bahwa nilai span yang dihasilkan merupakan span minimum. Berikut disajikan beberapa definisi dan lemma yang digunakan dalam penelitian ini.

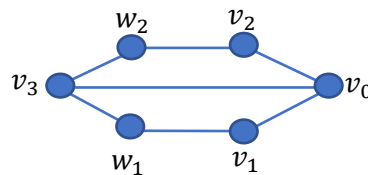
Definisi 1. (Gallian, 2022) Graf *double quadrilateral* DQ adalah graf yang dibangun dari graf siklus C_6 dengan salah satu pasangan simpul yang berjarak tiga dihubungkan oleh sebuah sisi.

Definisi 2. (Fery & Muhammad, 2016) Graf kincir angin *double quadrilateral* DQ_k adalah graf yang dibangun dengan menduplikasi graf *quadrilateral* sebanyak k kali, kemudian salah satu simpul berderajat 3 dari setiap duplikasi ditempelkan menjadi satu.

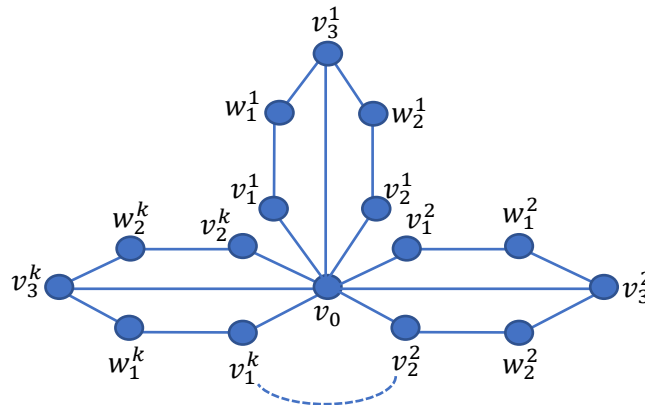
Gambar 1 dan Gambar 2 berturut-turut adalah contoh graf *double quadrilateral* DQ dan graf kincir angin *double quadrilateral* DQ_k .

Lemma 1. (Lum, 2007) Jika H adalah sebuah subgraf dari G , maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Lemma 2. (Griggs & Yeh, 1992) Misalkan S_n adalah sebuah graf bintang dengan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$.



Gambar 1. Graf *double quadrilateral* DQ



Gambar 2. Graf kincir angin *double quadrilateral* DQ_k

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan uraian mengenai konstruksi pelabelan $L(2,1)$ pada graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k), serta analisis matematis yang mendasari penentuan span minimumnya. Pembahasan diawali dengan penelusuran struktur masing-masing graf untuk mengidentifikasi pola keterhubungan simpul yang memengaruhi strategi pelabelan. Selanjutnya dipaparkan proses konstruksi label yang memenuhi syarat $L(2,1)$, yaitu selisih label minimal 2 untuk pasangan simpul bertetangga dan minimal 1 untuk pasangan simpul berjarak dua. Melalui pendekatan analitik dan pembuktian deduktif, setiap pola pelabelan diuji konsistensinya terhadap seluruh konfigurasi sisi dan jarak antar simpul. Hasil verifikasi ini kemudian digunakan untuk memperoleh span minimum pada masing-masing graf. Oleh karena itu, bagian ini tidak hanya menampilkan hasil akhir berupa nilai span minimum, tetapi juga memaparkan dasar teoretis yang menjelaskan mengapa konstruksi tersebut optimal untuk graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k).

Teorema 1. Untuk setiap $k \geq 2$, graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) memiliki $\lambda_{2,1}(FDQ_k) = 2k + 2$.

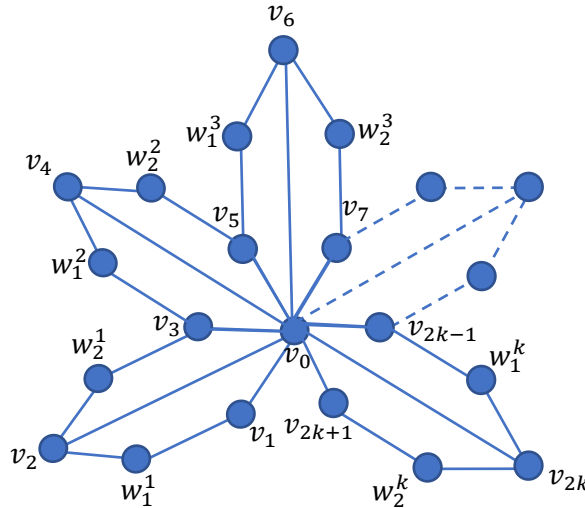
Bukti. Graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) memiliki himpunan simpul dan sisi sebagai berikut.

$$V(FDQ_k) = \{v_0\} \cup \{v_i | i = 1, 2, \dots, 2k + 1\} \cup \{w_j^i | j = 1, 2 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$E(FDQ_k) = \{v_0 v_i | i = 1, 2, \dots, 2k + 1\} \cup \{v_{2i-1} w_1^i | i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{w_1^i v_{2i} | i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$\cup \{v_{2i} w_2^i | i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{w_2^i v_{2i+1} | i = 1, 2, \dots, k\}$$

Sebagai contoh penotasian simpul dan sisi pada graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k) dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k)

Untuk membuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) = 2k + 2$, maka harus ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \geq 2k + 2$ dan $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \leq 2k + 2$. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \geq 2k + 2$. Pandang bahwa graf bintang S_{2k+1} adalah subgraf dari graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k). Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \geq \lambda_{2,1}(S_{2k+1}) = 2k + 2$, sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \geq 2k + 2$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \leq 2k + 2$ yaitu dengan mengkontruksi fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$ pada graf bunga *double quadrilateral* (FDQ_k). Definisikan fungsi $f: V(FDQ_k) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2k + 2\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i) = i + 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 2k + 1.$$

$$f(w_j^1) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } j = 1, \\ 1, & \text{untuk } j = 2. \end{cases}$$

$$\text{Untuk } i = 2, 3, \dots, k.$$

$$f(w_j^i) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } j = 1, \\ 1, & \text{untuk } j = 2. \end{cases}$$

Dengan mudah dapat divalidasi bahwa label simpul yang bertetangga memiliki selisih setidaknya 2 dan simpul yang berjarak dua memiliki selisih label setidaknya 1. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$, sehingga $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \leq 2k + 2$. Karena $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \geq 2k + 2$ dan $\lambda_{2,1}(FDQ_k) \leq 2k + 2$, maka terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(FDQ_k) = 2k + 2$. ■

Teorema 2. Untuk setiap $k \geq 2$, graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) memiliki $\lambda_{2,1}(DQ_k) = 3k + 1$.

Bukti. Langkah pertama dalam membuktikan Teorema 2 yaitu dengan menotasikan himpunan simpul dan sisi dari graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) sebagai berikut.

$$V(DQ_k) = \{v_0\} \cup \{v_j^i | j = 1, 2, 3 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{w_l^i | l = 1, 2 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$E(DQ_k) = \{v_0 v_j^i | j = 1, 2, 3 \text{ dan } i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{v_1^i w_1^i, w_1^i v_3^i, v_3^i w_2^i, w_2^i v_2^i | i = 1, 2, \dots, k\}$$

Ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) dapat dilihat pada Gambar 2.

Dengan cara yang sama, akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(DQ_k) \geq 3k + 1$. Perhatikan bahwa graf bintang S_{3k} adalah subgraf dari graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k). Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(DQ_k) \geq \lambda_{2,1}(S_{3k}) = 3k + 1$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(DQ_k) \geq 3k + 1$. Selanjutnya didefinisikan fungsi $f: V(DQ_k) \rightarrow \{0, 1, \dots, 3k + 1\}$ untuk membuktikan $\lambda_{2,1}(DQ_k) \leq 3k + 1$.

$$f(v_0) = 0.$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

$$f(v_j^i) = \begin{cases} 3i - 1, & \text{untuk } j = 1, \\ 3i, & \text{untuk } j = 2, \\ 3i + 1, & \text{untuk } j = 3. \end{cases}$$

Untuk $i = 1$.

$$f(w_l) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } l = 1, \\ 1, & \text{untuk } l = 2. \end{cases}$$

Untuk $i = 2, 3, \dots, k$.

$$f(w_l) = l, \text{ untuk } l = 1, 2.$$

Jelas bahwa label setiap simpul graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) yang dikonstruksi oleh fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$ dengan label simpul yang bertetangga memiliki selisih minimal 2 dan simpul yang berjarak dua memiliki selisih label minimal 1, sehingga $\lambda_{2,1}(DQ_k) \leq 3k + 1$. Karena $\lambda_{2,1}(DQ_k) \geq 3k + 1$ dan $\lambda_{2,1}(DQ_k) \leq 3k + 1$, maka $\lambda_{2,1}(DQ_k) = 3k + 1$.

4 KESIMPULAN

Berdasarkan konstruksi pola pelabelan dan pembuktian deduktif, diperoleh bahwa graf *bunga double quadrilateral* (FDQ_k) dan graf kincir angin *double quadrilateral* (DQ_k) memungkinkan penentuan rentang label yang memenuhi ketentuan dasar pelabelan $L(2,1)$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf *bunga double quadrilateral* (FDQ_k) memiliki span minimum $2k + 2$, sedangkan DQ_k memiliki span minimum $3k + 1$, menegaskan bahwa perbedaan struktur graf berpengaruh langsung pada kebutuhan rentang label minimum. Temuan ini mendukung hipotesis penelitian serta memperkuat pentingnya analisis struktur graf dalam penentuan pelabelan optimum. Penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dengan mengkaji pelabelan $L(2,1)$ pada kelas graf lain yang memiliki kompleksitas struktural lebih tinggi, menyusun algoritma untuk menghasilkan pelabelan optimum secara komputasional, atau menghubungkan hasil pelabelan dengan penerapannya pada simulasi jaringan komunikasi. Upaya ini diharapkan mampu memperluas pemahaman tentang pelabelan graf dan meningkatkan relevansinya dalam konteks praktis.

DAFTAR PUSTAKA

- Aminulloh, M., & Afif, R. (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2, 1)$ pada graf Petersen $P(n, 1)$* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan $L(2, 1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2). <https://core.ac.uk/reader/290089130>
- Fery, F., & Muhammad, W. S. (2016). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. In *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY 2016* (pp. 53-58).
- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of combinatorics*. Vol. 6 (25), pp: 4-623.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025a, August). Span Terkecil dari Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf Dumbbell. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 956-963).
- Komarullah, H., Im, F. A. J., & Maulidi, Z. J. K. (2025b, August). Nilai minimum span pelabelan berbasis jarak pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 917-922).
- Lum, A. (2007). Upper Bound on $L(2,1)$ -labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ . Retrieved from <https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf>
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Sierpinski $S(n,k)$. *Karismatika*, 3(2), 130-139.
- Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The $L(2, 1)$ -labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, 21(1), 37-41. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029>
- Swati, D. C., & Tiwari, M. A. N. I. (2021). An Introduction to graph theory in applied mathematics. *Stochastic Modeling and Applications*, 25(1), 301-306.
- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). $L(2, 1)$ Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>