

TEOREMA PHYTAGORAS DALAM FUNGSI KOMPLEKS DENGAN INTEGER GAUSSIAN

I Gede Eka Agung Agastya Punia^{1,2,3,4}

¹*Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Terbuka, Tangerang Selatan*

²*Program Studi Sarjana Kedokteran, Fakultas Kedokteran, Universitas Mahasaraswati Denpasar, Denpasar*

³*Program Studi Teknik Informatika, School of Computer Science, Universitas Bina Nusantara, Jakarta Barat*

⁴*Program Studi Doktor Ilmu Kedokteran, Fakultas Kedokteran, Universitas Indonesia, Depok*
Email Korespondensi: agastya@unmas.ac.id

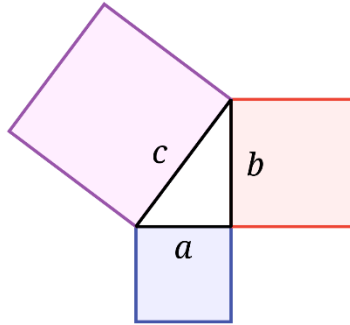
ABSTRAK

Teorema Pythagoras merupakan hubungan fundamental dalam geometri Euclid yang menyatakan bahwa kuadrat panjang hipotenusa suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat panjang kedua sisi tegaknya. Secara umum, teorema ini diterapkan pada bilangan real $\mathbb{R}$. Namun, dalam perkembangan matematika modern, konsep tersebut dapat diperluas ke ranah yang lebih abstrak, termasuk fungsi kompleks dan bilangan kompleks. Dengan memperkenalkan bilangan kompleks dalam konteks geometri, hubungan antara panjang sisi-sisi segitiga dapat dianalisis melalui representasi titik-titik pada bidang kompleks. Penelitian ini membahas perluasan Teorema Pythagoras dalam domain bilangan kompleks, khususnya pada integer Gaussian $\mathbb{Z}[i]$. Melalui sifat norma yang bersifat multiplikatif pada integer Gaussian, diperoleh bahwa persamaan $a^2 + b^2 = c^2$ dapat dibuktikan secara aljabar dalam kerangka fungsi kompleks. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Teorema Pythagoras tidak hanya berlaku dalam $\mathbb{R}^2$, tetapi juga dapat direkonstruksi secara elegan menggunakan struktur aljabar bilangan kompleks.

Kata kunci: Teorema Pythagoras, Fungsi Kompleks, Integer Gaussian, Norma Euclidean.

1 PENDAHULUAN

Teorema Pythagoras merupakan sebuah teorema fundamental dalam geometri Euclidean antara tiga sisi dalam sebuah segitiga siku-siku. Teorema ini menyatakan bahwa luas persegi dari sisi tegak dan datar merupakan sisi miring yakni sisi yang berhadapan dengan sudut siku-siku sama dengan jumlah luas persegi pada dua sisi lainnya yang dapat dilihat dari gambar berikut (Manjil, Sakaia. 2013)



Gambar 1. Teorema Pythagoras

Teorema ini dapat dituliskan sebagai persamaan yang menghubungkan panjang sisi a , b , dan sisi miring c , yang terkadang disebut persamaan Pythagoras yakni $a^2 + b^2 = c^2$. (Amato, Roberto, 2017) Ketika ruang Euclidean direpresentasikan oleh sistem koordinat Cartesian dalam geometri analitik, jarak Euclidean memenuhi hubungan Pythagoras yakni kuadrat jarak antara dua titik sama dengan jumlah kuadrat selisih setiap koordinat antara titik-titik tersebut. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, teorema Pythagoras dapat dikembangkan pada daerah dengan memiliki bilangan real dan memiliki integer positif. Hanya integer positif yang dapat merepresentasikan dimensi dari $a^2 + b^2 = c^2$ (Lee, Jeffrey & Cleaver, Gerald. 2022).

Akan tetapi, jika kita perluas Teorema Pythagoras ke dalam bilangan kompleks, khususnya pada integer Gaussian $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, maka akan muncul banyak solusi baru berupa bilangan bulat yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 = c^2$, yang tidak mungkin terjadi pada bilangan bulat biasa. Analisis kompleks merupakan cabang matematika yang mempelajari fungsi-fungsi holomorfik dan meromorfik dari variabel kompleks. Salah satu aplikasi menarik dari teori bilangan aljabar adalah pada integer Gaussian, yaitu himpunan bilangan kompleks dengan bagian real dan imajiner bulat. Pada integer Gaussian, norma Euclidean didefinisikan sebagai $N(a + bi) = a^2 + b^2$, yang bersifat multiplikatif: $N(zw) = N(z)N(w)$. Sifat ini membuat $\mathbb{Z}[i]$ menjadi domain faktorisasi unik dan bahkan domain Euclidean (Tang, Kwong-tin. 2022). Akibatnya, persamaan $a^2 + b^2 = c^2$ memiliki jauh lebih banyak solusi non-trivial dalam $\mathbb{Z}[i]$ dibandingkan dalam $\mathbb{Z}$. Penelitian ini bertujuan untuk membahas bagaimana Teorema Pythagoras dapat diperluas dan dibuktikan dalam konteks bilangan kompleks, khususnya menggunakan integer Gaussian.

2 METODE

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kualitatif aksiomatik. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dan berlandaskan pada sistem deduktif-aksiomatik yang berfungsi membangun teori matematika dari aksioma-aksioma fungsi kompleks yang diterima dan diturunkan secara logis melewati penalaran secara deduktif. Pendekatan kualitatif ini mencari pemahaman mendalam tentang teorema Pythagoras dalam fungsi kompleks

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Kunci yang kita perlu pahami dalam membuktikan ini adalah dengan merepresentasikan segitiga pada bidang kompleks dan menggunakan modulus atau norma dari bilangan kompleks, yang memenuhi $|zw| = |z| \cdot |w|$. konjugat dari $z = x + yi$ adalah $\bar{z} = x - yi$. Dan normanya $N(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2$

Bayangkan sebuah segitiga siku-siku yang terdapat vektor dalam daerah kompleks. Misalkan Panjang dan tinggi segitiga tersebut direpresentasikan dengan bilangan bulat Gaussian. Satu sisi dalam hal ini kita buat sisi panjang, menyentuh sumbu nyata dengan bilangan yakni $u = a + 0i$ dengan panjang adalah $|u| = a$ syarat $a > 0$ dan tinggi yang menyentuh garis imajiner dengan rumus $v = 0 + bi$ dengan panjang $|v| = b$ dengan syarat $b > 0$. Vektor-vektor ini tegak lurus karena arahnya ortogonal antara sumbu nyata dan sumbu imajiner. Sisi miring adalah jumlah vektor $w = u + v = a + bi$ dengan panjang sisi miring adalah $|w| = c = \sqrt{a^2 + b^2}$ selain itu $\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}$ hal ini dibuktikan dari perkalian $i = e^{i\pi/2}$ dan memutar a dengan 90° untuk sejajar dengan b .

Selanjutnya kita beralih ke norma. Kita paham bahwa norma dari integer Gaussian $z = x + yi$ adalah $N(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Norma ini akan selalu bernilai bilangan bulat non-negatif. Kita lihat bahwa norma ini bersifat multiplikatif karena pada integer Gaussian z_1, z_2 dengan $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$. Panjang kuadrat dari setiap bilangan kompleks dari $w = x + yi$ merupakan norma dari $N(w) = |w|^2 = w\bar{w}$ dimana $\bar{w} = x - yi$ yang merupakan sebuah konjugat kompleks. Sehingga

$$|w|^2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

sedangkan untuk sisi miring $z = a + bi$ adalah

$$c^2 = |z|^2 = z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

Selain itu norma ini juga memenuhi hukum jajar genjang dari geometri vektor yang kita dapat buktikan dengan

$$N(u + v) = N(u) + N(v) + 2 \operatorname{Re}(u\bar{v}),$$

dimana bagian $\operatorname{Re}()$ menunjukkan bagian real. Dengan bukti:

$$\begin{aligned} N(u + v) &= (u + v)(\bar{u} + \bar{v}) \\ &= u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{v} + v\bar{u} \\ &= N(u) + N(v) + 2 \operatorname{Re}(u\bar{v}) \end{aligned}$$

Untuk vektor tegak lurus u dan v di bidang kompleks, hasil kali titiknya adalah nol sehingga $\operatorname{Re}(u\bar{v}) = 0$ dan rumus diatas berubah menjadi

$$N(u + v) = N(u) + N(v) + 2 \cdot 0 = N(u) + N(v).$$

akan tetapi $N(u + v) = N(w) = c^2$ dan $N(u) = a^2$ dan $N(v) = b^2$ sehingga kita bisa simpulkan bahwa $c^2 = a^2 + b^2$. (2)

Sehingga dengan terbuktinya (1) dan (2) maka kita sudah menemukan teorema pythagoras dalam fungsi kompleks dengan integer Gaussian. Hal ini terbukti dengan modulus $|Z|$ ditemukan sesuai dengan jarak Euclides $\mathbb{R}^2$ dimana $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Perhitungan dari $z\bar{z} = |z|^2$ sama dengan dot product dimana vektor $u = (a, b)$ dan $v = (a, -b)$, $|u|^2 = u \cdot v$, tetapi tegak lurus kaki memastikan tidak ada persilangan yakni dengan $N(u + v) = N(u) +$

$N(v) + 2\operatorname{Re}(u\bar{v})$ dan $\operatorname{Re}(u\bar{v}) = 0$. Kita juga paham bahwa pada pembuktian ini bidang kompleks memvisualisasikan vektor, dan tegak lurus bersifat aljabar melalui bagian riil $u\bar{v}$. Pendekatan ini mengukuhkan bahwa Teorema Pythagoras bukan hanya fenomena geometris statis, melainkan konsekuensi fundamental dari struktur ruang hasil kali dalam (inner product space) pada bidang kompleks. Secara ilmiah, argumen ini selaras dengan prinsip dasar dalam Analisis Kompleks dan Aljabar Linear, didefinisikan melalui hasil kali titik yang dalam konteks kompleks. Sebagaimana dibahas dalam literatur mengenai *Gaussian Integers* dan *Algebraic Number Theory*, sifat multiplikatif dari norma ini merupakan fondasi bagi Identitas Diophantus-Brahmagupta, yang secara aljabar menjamin bahwa jarak Euclidean tetap konsisten di bawah transformasi linear. pada vektor ortogonal mencerminkan ortogonalitas dalam Ruang Hilbert, di mana proyeksi vertikal dan horizontal tidak saling berinteraksi secara norma. Hal ini membuktikan bahwa representasi segitiga pada bidang kompleks adalah isomorfik terhadap bidang Euclidean, menjadikan Teorema Pythagoras sebagai hukum universal yang menjembatani aritmatika bilangan bulat dengan geometri kontinu.

4 KESIMPULAN [TNR 12, CETAK TEBAL, KAPITAL DAN RATA KIRI KANAN]

Pembuktian teorema Pythagoras pada bilangan kompleks dengan integer Gaussian dapat dilakukan dengan pendekatan aljabar. Dengan kita membayangkan segitiga di bidang kompleks, di mana sisi alas $u = a + 0i$ dan sisi tinggi $v = 0 + bi$ dengan $a, b > 0$ dan serta sisi miring $w = u + v = a + bi$, kita memanfaatkan properti modulus $|z|$ yang sesuai dengan jarak Euclidean dan norma $N(z) = z \cdot \{z\} = x^2 + y^2$. Karena vektor u dan v tegak lurus maka dapat dikatakan norma bersifat multiplikatif dan memenuhi $N(u + v) = N(u) + N(v)$, yang membuktikan $c^2 = a^2 + b^2$, di mana $c = |w|$. Pendekatan ini melihat bahwa teorema Pythagoras pada fungsi kompleks dapat muncul dari konjugasi kompleks dan sifat $i^2 = -1$ penelitian ini menyediakan bukti yang sepenuhnya aljabar tanpa bergantung pada geometri tradisional dan mengacu kepada kesetaraan antara bidang kompleks dan ruang Euclidean $\mathbb{R}^2$.

DAFTAR PUSTAKA

- Saikia, Manjil P. (2013). "The Pythagoras's Theorem". p. 5. arXiv:1310.0986
Amato, Roberto. (2017). A characterization of pythagorean triples. JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications. 39. 221-230. 10.17654/NT039020221.
Lee, Jeffrey & Cleaver, Gerald. (2022). The Real Number n-Degree Pythagorean Theorem. 10.48550/arXiv.2301.02600.
Tang, Kwong-tin. (2022). Complex Functions. 10.1007/978-3-031-05678-9_2.