

PELABELAN JARAK DUA PADA BEBERAPA KELAS GRAF

Hafif Komarullah^{1*}, Rizqy Amalia Nurfadila², Siti Zulva Rosyidah³

^{1,2,3}Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

*Email: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas penentuan nilai minimum *span* pelabelan $L(2,1)$ pada tiga kelas graf khusus, yaitu graf petasan ($F_{m,n}$), graf *mushroom* ganda ($2Mr_n$), dan graf *splitting* dari graf bintang ($Spl(K_{1,n})$). Pelabelan $L(2,1)$ merupakan fungsi yang memberikan label bilangan bulat non-negatif pada setiap titik graf dengan ketentuan bahwa dua titik yang berjarak satu memiliki selisih label sedikitnya dua dan titik yang berjarak dua memiliki selisih label sedikitnya satu. Metode penelitian menggunakan pendekatan deskriptif aksiomatik untuk mendefinisikan sifat struktural tiap graf dan lemma pelabelan yang relevan, dilanjutkan dengan pendeteksian pola untuk mengidentifikasi keteraturan label yang muncul. Melalui analisis ini diperoleh konstruksi pola pelabelan yang memenuhi seluruh aturan serta membuktikan ketercapaian batas bawah nilai *span*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf petasan memenuhi $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) = n + 1$, graf *mushroom* ganda memenuhi $\lambda_{2,1}(2Mr_n) = 2n + 2$, dan graf *splitting* dari graf bintang memenuhi $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) = 2n + 1$. Temuan ini memberikan kontribusi pada pengembangan teori pelabelan graf, khususnya pada pelabelan $L(2,1)$.

Kata kunci: graf *mushroom* ganda, graf petasan, graf *splitting*, pelabelan $L(2,1)$, *span* minimum.

1 PENDAHULUAN

Matematika adalah disiplin ilmu yang bersifat mendasar dan universal, memiliki peran penting dalam berbagai bidang pengetahuan serta dalam pengembangan cara berpikir manusia (Komarullah & Zhahra, 2023). Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang memiliki peran penting dalam kehidupan sehari-hari. Dalam pengaplikasiannya, teori graf merepresentasikan objek dengan titik dan hubungan antar objek dengan sisi. Pelabelan graf merupakan salah satu cabang penting dalam teori graf yang berfokus pada pemberian label bilangan bulat pada elemen-elemen graf berdasarkan aturan tertentu (Gallian, 2022). Kajian mengenai pelabelan graf terus berkembang karena keterkaitannya dengan berbagai permasalahan praktis, seperti pengalokasian frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992), penjadwalan (Komarullah & Fauzan, 2025), pengkodean (Prihandoko dkk., 2019), serta pengaturan sumber daya pada jaringan komunikasi (Prasanna dkk., 2014). Salah satu jenis pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan jarak dua atau dikenal dengan pelabelan $L(2,1)$ yang pertama kali diperkenalkan untuk memodelkan masalah penetapan frekuensi agar interferensi antar stasiun radio dapat diminimalkan. Pelabelan $L(2,1)$ pada suatu graf G merupakan fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ dengan ketentuan bahwa untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ berlaku syarat $|f(u) - f(v)| \geq 2$ jika $d(u, v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$ jika $d(u, v) = 2$ (Griggs & Yeh, 1992). Nilai k terbesar dari himpunan label tersebut disebut *span* atau label maksimum yang muncul pada pelabelan

$L(2,1)$. Karena sebuah graf G dapat memiliki beberapa kemungkinan nilai *span*, fokus kajian ini adalah menentukan nilai *span* minimum, yang dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Shao dkk., 2008).

Berbagai penelitian sebelumnya telah membahas sejumlah kelas graf untuk menentukan nilai *span* minimum pada pelabelan $L(2,1)$. Pada graf siklus (C_n) dan graf lintasan (P_n), diketahui bahwa keduanya memiliki nilai *span* minimum sebesar 4. Untuk graf bintang (S_n) dan graf roda (W_n), *span* minimum yang diperoleh adalah $(n + 1)$ (Griggs & Yeh, 1992). Selain itu, graf Sierpinski ($S_{n,m}$) pada kasus $m = 2$ dan $m = 3$ juga memiliki *span* minimum yang sama, yaitu 4 (Sagala & Susiana, 2017). Adapun graf lolipop ($L_{m,n}$) dan graf pendulum (P_n^k) masing-masing mempunyai *span* minimum sebesar $2m - 1$ dan $k + 1$ (Umam dkk., 2022). Beragam hasil lain mengenai pelabelan $L(2,1)$ dapat ditemukan pada studi (Fatimah dkk., 2016; Aminulloh & Afif, 2019; Komarullah, 2020; Halikin & Komarullah, 2022; Komarullah dkk., 2022; Komarullah, 2023; Komarullah dkk., 2025ba; Komarullah dkk., 2025b).

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka dalam penelitian ini akan dibahas *span* minimum dari beberapa kelas graf yaitu graf petasan ($F_{m,n}$), graf *mushroom* ganda ($2Mr_n$), dan graf *splitting* dari graf bintang ($Spl(K_{1,n})$). Ketiga graf ini dipilih karena belum diteliti nilai minimal *span*-nya.

Definisi 1. (Septiana & Rahadjeng, 2014) Graf bintang S_n adalah graf terhubung sederhana dengan satu titik pusat yang terhubung ke semua titik lain, yang tidak terhubung satu sama lain. Graf bintang memiliki $n + 1$ titik, di mana satu titik memiliki derajat n dan n titik masing-masing memiliki derajat 1.

Definisi 2. (Chen & Yeh, 1997) Graf petasan ($F_{m,n}$) merupakan graf yang dibentuk dari rangkaian sebanyak m graf bintang S_n , di mana masing-masing graf bintang memiliki $n + 1$ titik. Setiap bintang dihubungkan dengan cara menyambungkan salah satu daun dari tiap graf bintang tersebut secara berurutan pada setiap titik graf lintasan P_m .

Definisi 3. (Halikin dkk., 2025) Graf *mushroom* (Mr_n) adalah graf yang dibangun dengan melekatkan titik pusat graf kipas F_n dan graf bintang S_n .

Definisi 4. (Ghosh dkk., 2015) Graf *splitting* dari suatu graf terhubung G , yang dilambangkan sebagai $S'(G)$, adalah graf yang dibentuk dengan menambahkan sebuah titik baru u' untuk setiap titik u pada graf G . Penambahan ini dilakukan sedemikian sehingga titik u' memiliki himpunan tetangga yang sama dengan titik u , yakni $N(u) = N(u')$, di mana $N(u)$ dan $N(u')$ masing-masing menyatakan persekitaran terbuka dari titik u dan u' .

2 METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola untuk menentukan nilai *span* minimum pelabelan $L(2,1)$ pada graf petasan ($F_{m,n}$), graf *mushroom* ganda ($2Mr_n$), dan graf *splitting* dari graf bintang ($Spl(K_{1,n})$). Pendekatan deskriptif aksiomatik digunakan untuk mendeskripsikan struktur tiap graf secara formal berdasarkan definisi, sifat-sifat dasar, serta lemma yang relevan dalam pelabelan $L(2,1)$. Metode pendeteksian pola diterapkan untuk menemukan keteraturan dalam distribusi label pada masing-masing graf. Prosedur ini dilakukan dengan cara melakukan pelabelan $L(2,1)$ pada order tertentu. Hasil *span* minimum dari percobaan yang dilakukan, kemudian dianalisis untuk mendapatkan *span* minimum pada graf secara umum. Berikut beberapa lemma yang digunakan dalam membuktikan teorema *span* minimum dari graf yang diteliti.

Lemma 1. (Lum, 2007) Jika H adalah sebuah subgraf dari G , maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Lemma 2. (Griggs & Yeh, 1992) Misalkan S_n adalah sebuah graf bintang dengan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini disajikan uraian mengenai hasil analisis dan pembahasan terkait penentuan nilai *span* minimum dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf petasan ($F_{m,n}$), graf *mushroom* ganda ($2Mr_n$), dan graf *splitting* dari graf bintang ($Spl(K_{1,n})$). Pembahasan dalam bagian ini meliputi tiga tahap utama. Pertama, pendefinisian titik dan sisi dari masing-masing graf. Kedua, penentuan batas bawah menggunakan lemma yang sudah dipaparkan pada bagian sebelumnya. Ketiga, menentukan batas atas dari masing-masing graf dengan mengkontruksi fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$.

Teorema 1. Untuk setiap $n \geq 7$ dan $m \geq 2$, graf petasan $F_{m,n}$ memiliki $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) = n + 1$.

Bukti. Graf petasan $F_{m,n}$ dengan order $m + n$ memiliki himpunan titik $V(F_{m,n}) = \{v_i^j | i = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$ dan himpunan sisi $E(F_{m,n}) = \{v_1^j v_1^{j+1} | j = 1, 2, \dots, m - 1\} \cup \{v_0^j v_i^j | i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$. Untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) = n + 1$, maka harus dibuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \geq n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$. Dalam membuktikan $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \geq n + 1$, peneliti menggunakan lemma batas bawah. Perhatikan bahwa graf bintang S_n adalah subgraf dari graf petasan $F_{m,n}$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \geq \lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$, sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \geq n + 1$. Selanjutnya, akan dibangun fungsi yang memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$ untuk membuktikan $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$. 1. Definisikan fungsi $f: V(F_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ sebagai berikut.

$$f(v_1^j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{3}, \\ 4, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$f(v_0^j) = n + 1, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

Untuk $j \equiv 1 \pmod{3}$

$$f(v_i^j) = i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Untuk $j \equiv 2 \pmod{3}$

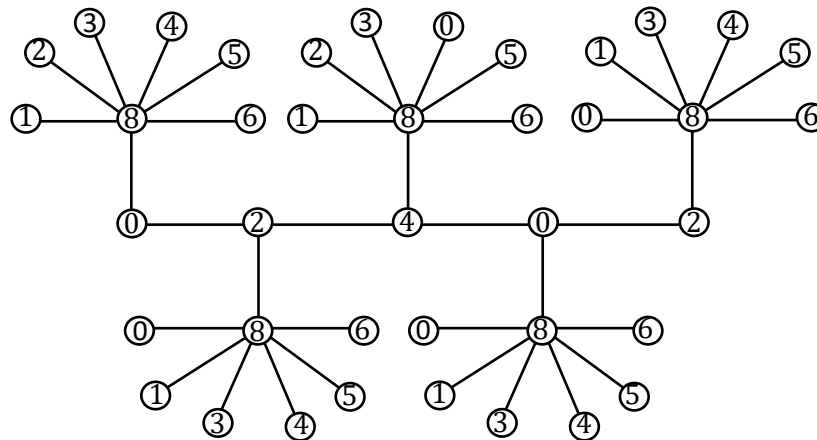
$$f(v_i^j) = \begin{cases} i - 1, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ i, & \text{untuk } i = 3, 4, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Untuk $j \equiv 0 \pmod{3}$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i - 1, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ i + 2, & \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa hasil pemetaan fungsi f menunjukkan bahwa titik yang bertetangga setidaknya memiliki perbedaan label setidaknya dua, dan titik berjarak dua setidaknya memiliki perbedaan label setidaknya satu. Karena f memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$ pada graf petasan $F_{m,n}$, maka $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$. Dapat ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \geq n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$, sehingga $\lambda_{2,1}(F_{m,n}) = n + 1$. ■

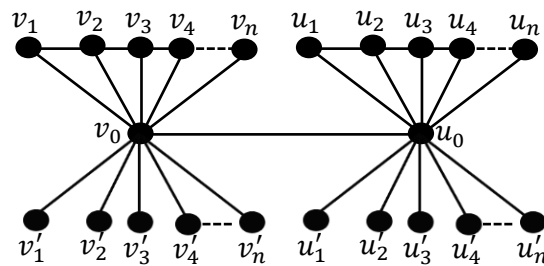
Untuk memperjelas Teorema 1, pada Gambar 1 disajikan contoh dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf petasan $F_{5,7}$ dengan $\lambda_{2,1}(F_{5,7}) = 8$.



Gambar 1. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf petasan $F_{5,7}$

Teorema 2. Untuk setiap $n \geq 2$, graf *mushroom* ganda $(2Mr_n)$ memiliki $\lambda_{2,1}(2Mr_n) = 2n + 2$.

Bukti. Graf *mushroom* ganda $(2Mr_n)$ adalah graf yang diperoleh dari dua buah graf *mushroom* (Mr_n) dan satu buah graf lintasan P_2 dengan menempelkan setiap titik pusat graf *mushroom* (titik berderajat $2n + 1$) ke setiap titik pada graf lintasan P_2 . Graf *mushroom* ganda $(2Mr_n)$ memiliki himpunan titik $V(2Mr_n) = \{v_0\} \cup \{u_0\} \cup \{v_i, v'_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{u_i, u'_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E(2Mr_n) = \{v_0u_0\} \cup \{v_0v_i, v_0v'_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_iv_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{u_0u_i, u_0u'_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{u_iu_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Contoh graf *mushroom* ganda $(2Mr_n)$ dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf *mushroom* ganda $(2Mr_n)$

Dengan cara yang sama akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \geq 2n + 2$ dan $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \leq 2n + 2$. Ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \geq 2n + 2$, perhatikan bahwa bahwa graf bintang S_{2n+1} merupakan subgraf dari graf *mushroom* ganda $(2Mr_n)$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \geq \lambda_{2,1}(S_{2n+1}) = 2n + 2$, sehingga $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \geq 2n + 2$. Selanjutnya, definisikan fungsi $f: V(2Mr_n) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2n + 2\}$ untuk menunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \leq 2n + 2$.

$$\begin{aligned} f(v_i) &= \begin{cases} 0, & \text{untuk } i = 0, \\ 2i, & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \\ f(v'_i) &= 2i + 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

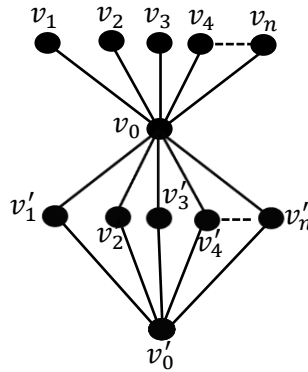
$$f(u_i) = \begin{cases} n+1, & \text{untuk } i = 0, \\ 2i, & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

$$f(u'_i) = \begin{cases} 2i+1, & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

Dengan mudah dapat diverifikasi bahwa titik berjarak satu memiliki mutlak selisih label minimal dua dan titik berjarak dua memiliki mutlak selisih label minimal satu, artinya fungsi f memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \leq 2n+2$. Karena $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \geq 2n+2$ dan $\lambda_{2,1}(2Mr_n) \leq 2n+2$, maka $\lambda_{2,1}(2Mr_n) = 2n+2$. ■

Teorema 3. Untuk setiap $n \geq 2$, graf *splitting* dari graf bintang ($Spl(K_{1,n})$) memiliki $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) = 2n+1$.

Bukti. Graf *splitting* dari graf bintang $Spl(K_{1,n})$ memiliki himpunan titik dan sisi berturut-turut yaitu $V(Spl(K_{1,n})) = \{v_i | i = 0, 1, \dots, n\} \cup \{v'_i | i = 0, 1, \dots, n\}$ dan $E(Spl(K_{1,n})) = \{v_0v_i, v_0v'_i | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v'_0v'_i | i = 1, 2, \dots, n\}$. Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf *splitting* dari graf bintang $Spl(K_{1,n})$ dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf *splitting* dari graf bintang $Spl(K_{1,n})$

Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) \geq 2n+1$. Pandang bahwa salah satu subgraf dari graf *splitting* dari graf bintang $Spl(K_{1,n})$ adalah graf bintang S_{2n} . Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) \geq \lambda_{2,1}(S_{2n}) = 2n+1$, sehingga $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) \geq 2n+1$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) \leq 2n+1$ dengan mengkontruksi fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$. Definisikan fungsi $f: V(Spl(K_{1,n})) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2n+1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i = 0, \\ i+1, & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

$$f(v'_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 0, \\ n+i+1, & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Perhatikan selisih label titik berjarak satu yaitu $|f(v_0) - f(v_i)| = |0 - (i+1)| \geq 2$, $|f(v_0) - f(v'_i)| = |0 - (n+i+1)| \geq 2$, dan $|f(v'_0) - f(v'_i)| = |1 - (n+i+1)| \geq 2$ untuk $i =$

$1, 2, \dots, n$. Selanjutnya, selisih label untuk titik berjarak dua yaitu $|f(v_0) - f(v'_0)| = |0 - 1| \geq 1$ dan $|f(v_i) - f(v'_i)| = |(i + 1) - (n + i + 1)| \geq 1$. Berdasarkan uraian tersebut, terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) \leq 2n + 1$, sehingga $\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) = 2n + 1$. ■

4 KESIMPULAN

Penelitian ini menyimpulkan bahwa nilai minimum *span* pelabelan $L(2,1)$ pada tiga kelas graf yaitu graf petasan ($F_{m,n}$), graf *mushroom* ganda ($2Mr_n$), dan graf *splitting* dari graf bintang ($Spl(K_{1,n})$) berhasil ditentukan melalui pendekatan deskriptif aksiomatik yang memanfaatkan karakteristik struktural tiap graf serta pola pelabelan yang konsisten dengan aturan jarak. Hasil analisis menunjukkan bahwa graf petasan memenuhi ($\lambda_{2,1}(F_{m,n}) = n + 1$), graf *mushroom* ganda memenuhi ($\lambda_{2,1}(2Mr_n) = 2n + 2$), dan graf *splitting* dari graf bintang memenuhi ($\lambda_{2,1}(Spl(K_{1,n})) = 2n + 1$). Temuan ini menegaskan bahwa struktur graf memiliki peran penting dalam menentukan pola pelabelan optimal dan memberikan kontribusi signifikan pada pengembangan teori pelabelan graf, khususnya dalam konteks pelabelan $L(2,1)$, sekaligus membuka peluang penelitian lanjutan pada kelas graf lain yang lebih kompleks maupun aplikasi praktis pada penataan frekuensi jaringan komunikasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Aminulloh, M., & Afif, R. (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2, 1)$ pada graf petersen $P(n, 1)$* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).
- Chen, W., dan Yeh, Y. (1997). Operations of interlaced trees and graceful trees. *Southeast Asian Bull. Math*, 21(4), 337-348.
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan $L(2, 1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2). <https://core.ac.uk/reader/290089130>
- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of combinatorics*. Vol. 6 (25), pp: 4-623.
- Ghosh, P., Mishra, S. N., & Pal, A. (2015). Various labeling on bull graph and some related graphs. *International Journal of Applications of Fuzzy Sets and Artificial Intelligence*, 5, 23–35.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Halikin, I., Arianti, J. A. A. N., Kusbudiono, K., & Wijaya, K. (2025, June). Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf Mushroom dan Gabungannya. In *prossiding galuh mathematics national conference* (Vol. 5, No. 1, pp. 143-153).

- Komarullah, H. (2020). Pelabelan $L(2, 1)$ Pada Graf Buku Segi Tiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell serta Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Buku Segi Tiga dan Graflintasan. Diambil kembali dari <http://repository.unej.ac.id/handle/123456789/99497>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025a, August). Span Terkecil dari Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Dumbbell. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi" SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 956-963).
- Komarullah, H., Im, F. A. J., & Maulidi, Z. J. K. (2025b, August). Nilai minimum span pelabelan berbasis jarak pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi" SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 917-922).
- Komarullah, H., & Zhahra, M. A. Al. (2023). Pemanfaatan Plotagon sebagai Media Pembelajaran Matematika FPB dan KPK. *Prosiding Seminar Nasional Ilmu Pendidikan*, 2(1), 71–75.
- Komarullah, H., & Fauzan, A. (2025, August). Pemanfaatan pewarnaan graf menggunakan algoritma welch-powell dalam menyusun jadwal ronda. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi" SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 923-930).
- Lum, A. (2007). Upper Bound on $L(2,1)$ -labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ . Retrieved from <https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf>
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139-145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Sierpinski $S(n,k)$. *Karismatika*, 3(2), 130-139.
- Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The $L(2, 1)$ -labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, 21(1), 37-41. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029>
- Septiana Eka, R., & Rahadjeng, B. (2014). Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang dan Graf Bipartit Komplit. *Teorema*, 3(1), 1-6.
- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). $L(2, 1)$ Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>