

DETERMINAN MATRIKS KETETANGGAAN GRAF BUKU SEGITIGA

Hafif Komarullah^{1*}, Mifdati Afifah², Siti Nur Afifah³

^{1,2,3}Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

*Email: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Graf buku segitiga merupakan salah satu struktur graf yang menarik untuk dikaji melalui matriks ketetanggaannya. Penelitian ini bertujuan menentukan determinan matriks ketetanggaan graf buku segitiga. Metode yang digunakan adalah pendekatan analitik dengan membentuk matriks ketetanggaan berdasarkan struktur graf dan menghitung determinannya menggunakan reduksi baris serta sifat-sifat determinan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa determinan matriks ketetanggaan graf buku segitiga selalu bernilai nol untuk setiap $n \geq 2$. Temuan ini menunjukkan bahwa matriks ketetanggaan graf buku segitiga bersifat singular dan mengandung ketergantungan linear yang berasal dari struktur grafnya.

Kata kunci: matriks ketetanggaan, determinan, graf buku segitiga

1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam matematika diskrit yang memiliki beragam aplikasi pada bidang jaringan komunikasi (Prasanna dkk., 2014), pengalokasian frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992), penjadwalan (Komarullah & Fauzan, 2025), pengkodean (Prihandoko dkk., 2019), penentuan jarak terpendek (Nurfadila dkk., 2025), pengoptimalan lokasi (Komarullah & Rosyidah, 2025), dan melatih berpikir komputasional siswa (Sari dkk., 2025). Salah satu objek fundamental dalam teori graf adalah matriks ketetanggaan, yaitu representasi aljabar dari hubungan ketetanggaan antar simpul dalam suatu graf (Somayasa, W., & Budiman, 2023). Matriks ini tidak hanya digunakan sebagai alat pencatatan struktur graf, tetapi juga memiliki kedudukan penting dalam berbagai analisis seperti penentuan spektrum graf, kajian kestabilan struktur jaringan, serta karakterisasi sifat-sifat aljabar suatu graf. Determinan matriks ketetanggaan menjadi salah satu parameter aljabar yang dapat memberikan informasi struktural mengenai graf, misalnya terkait keterhubungan, *jumlah perfect matching*, serta sifat-sifat spektral yang relevan dalam fisika teoretis dan kimia molekuler. Oleh karena itu, penentuan nilai determinan untuk kelas graf tertentu menjadi topik yang menarik untuk diteliti, terutama pada graf yang memiliki pola konstruksi teratur.

Beberapa kelas graf telah diteliti determinan matriks ketetanggaannya. Hutabarat (2020) menunjukkan bahwa determinan matriks ketetanggaan dari graf Kneser bernilai 0. Arman dkk. (2023) meneliti determinan ketetanggaan dari graf roda W_n . Selanjutnya, Adrianto dkk. (2025) melakukan penelitian yang sama pada graf *pan*. Beberapa kelas graf lain yang telah diteliti matriks ketetanggaannya adalah graf barbel (Perkasa, 2021), graf matahari, graf prisma (Aliffia, 2024), graf Graf Topologi Bintang Simetris Inti Lengkap (Astuti, 2024), dan graf *pan* (Adrianto dkk., 2025).

Berdasarkan penelitian terdahulu, maka dalam paper ini akan dibahas determinan ketetanggaan dari graf buku segitiga ($K_{1,1,n}$).

Definisi 1. (Wallis, 2001) Graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ dengan order n dan ukuran $2n + 1$ adalah graf tripartit lengkap $K_{r,s,t}$ dengan simpul r dan s masing-masing sama dengan satu dan jumlah simpul pada t sebanyak n . Graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ adalah graf yang memuat n buah graf siklus C_3 ($n \geq 2$) dengan setiap siklus C_3 mempunyai satu sisi yang digunakan bersama atau dengan kata lain setiap siklus C_3 mempunyai 2 simpul yang sama.

Definisi 2. (Aguilar, 2021) Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks ketetanggaan dari G adalah matriks berukuran $n \times n$, dinotasikan dengan $A = A(G)$, di mana entri ke- (i, j) didefinisikan sebagai berikut:

$$A(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{lainya.} \end{cases}$$

Penelitian dilakukan melalui pendekatan analitik dengan memanfaatkan struktur berulang pada graf buku segitiga sehingga memungkinkan diperoleh formula determinan secara umum. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian aljabar pada graf dan menjadi rujukan bagi penelitian lanjutan yang berkaitan dengan spektrum graf maupun aplikasinya dalam berbagai bidang. Graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ dipilih karena belum dianalisis determinan ketetanggaannya oleh peneliti sebelumnya.

2 METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan teoretis melalui analisis aljabar terhadap struktur graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$. Metode yang digunakan terdiri atas beberapa tahapan berikut:

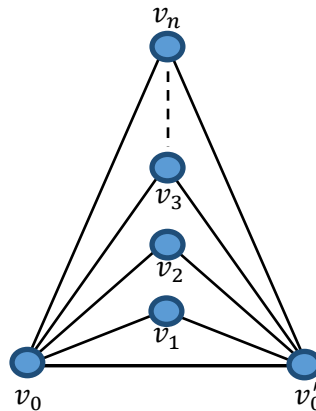
1. **Konstruksi Struktur Graf**
Tahap awal dilakukan dengan mendefinisikan secara formal graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ serta mengidentifikasi himpunan simpul dan himpunan sisinya. Representasi graf disusun untuk memahami pola keterhubungan antar simpul.
2. **Pembentukan Matriks Ketetanggaan**
Berdasarkan struktur graf, disusun matriks ketetanggaan $(A(G))$ berukuran $(n + 2) \times (n + 2)$.
3. **Analisis Determinan Secara Analitis**
Setelah matriks ketetanggaan terbentuk, langkah selanjutnya adalah menghitung determinannya menggunakan teknik reduksi baris dan kolom, serta memanfaatkan sifat-sifat determinan seperti linearitas, pertukaran baris, dan operasi baris elementer.
4. **Pembuktian Umum melalui Induksi Struktur**
Untuk menunjukkan perilaku determinan secara umum pada setiap $(n \geq 2)$, digunakan pendekatan pembuktian analitis berdasarkan pola matriks yang terbentuk. Pendekatan ini memastikan bahwa hasil yang diperoleh tidak hanya berlaku pada contoh khusus, tetapi valid untuk semua ukuran graf buku segitiga.
5. **Verifikasi Hasil**
Hasil perhitungan determinan untuk beberapa nilai n diuji kembali secara manual guna memastikan konsistensi hasil dan mendukung generalisasi bahwa determinan matriks ketetanggaan graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$.

Metode ini sepenuhnya bersifat teoritis dan tidak melibatkan komputasi numerik berbantuan perangkat lunak, sehingga seluruh kesimpulan diperoleh melalui analisis matematis langsung terhadap struktur graf dan sifat-sifat matriks ketetanggaan.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan analisis mengenai determinan matriks ketetanggaan graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ berdasarkan metode konstruksi matriks dan kajian aljabar yang telah dijelaskan sebelumnya. Hasil penelitian difokuskan pada penelusuran pola keterhubungan graf dan implikasinya terhadap bentuk serta sifat matriks ketetanggaannya. Melalui pendekatan reduksi baris dan pemanfaatan sifat-sifat determinan, diperoleh gambaran mengenai karakter aljabar graf yang mencerminkan perilaku umum matriksnya untuk setiap nilai $(n \geq 2)$.

Graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ memiliki himpunan titik $V(K_{1,1,n}) = \{v_0\} \cup \{v'_0\} \cup \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E(K_{1,1,n}) = \{v_0 v'_0\} \cup \{v_0 v_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v'_0 v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$. Untuk memperjelas, Gambar 1 adalah contoh dari graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$.



Gambar 1. Graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$

Untuk memperoleh determinan graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$, dalam paper ini peneliti menggunakan metode pendeteksian pola dengan menghitung determinan pada graf buku segitiga dengan order tertentu.

1. graf buku segitiga $(K_{1,1,2})$

Berdasarkan penotasian titik dan sisi yang sudah dijabarkan sebelumnya, maka akan dibentuk matriks ketetanggaan graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ adalah matriks berukuran 4×4 yang didefinisikan sebagai.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan determinan matriks A , dalam hal ini digunakan metode minor kofaktor.

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. graf buku segitiga $(K_{1,1,3})$

Selanjutnya, akan ditentukan pula determinan matriks ketetanggaan pada graf buku segitiga $(K_{1,1,3})$. Matriks ketetanggaan pada graf buku segitiga $(K_{1,1,3})$ adalah graf berukuran 5×5 yang didefinisikan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan determinan matriks ketetanggaan A dengan menggunakan metode minor kofaktor.

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. graf buku segitiga ($K_{1,1,4}$)

Untuk graf buku segitiga ($K_{1,1,4}$) diperoleh matriks ketetanggaan berukuran 6×6 yang didefinisikan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada kasus ini, peneliti menggunakan eliminasi Gauss sebagai berikut.

a. Tukar baris 1 dan 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Lakukan operasi baris

$$R_3 = R_3 - R_1$$

$$R_4 = R_4 - R_1$$

$$R_5 = R_5 - R_1$$

$$R_6 = R_6 - R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c. Lakukan operasi baris

$$R_3 = R_3 - R_2$$

$$R_4 = R_4 - R_2$$

$$R_5 = R_5 - R_2$$

$$R_6 = R_6 - R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

d. Lakukan operasi baris

$$R_4 = R_4 - R_3$$

$$R_5 = R_5 - R_3$$

$$R_6 = R_6 - R_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A sudah menjadi matriks segitiga atas, sehingga determinannya yaitu :

$$\det A = 1 \times 1 \times -2 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$$

Hasil eliminasi menunjukkan adanya baris nol, sehingga determinan matriks bernilai nol.

Berdasarkan pola determinan matriks ketetanggaan pada graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ dengan $n = 2, 3, 4$, maka diperoleh teorema berikut.

Teorema 1. Untuk setiap $n \geq 2$, determinan matriks ketetanggaan dari graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ adalah 0.

Bukti. Langkah pertama akan dibangun matriks ketetanggaan pada graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ sebagai berikut.

$$A(K_{1,1,n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss diperoleh matriks tereduksi sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh bahwa $\det A = 1 \times 1 \times 1 \times 0 \times \dots \times 0 = 0$.

Terbukti bahwa determinan matriks ketetanggaan dari graf buku segitiga $K_{1,1,n}$ memiliki adalah 0. ■

4 KESIMPULAN

Berdasarkan analisis matriks yang dibangun dari pola keterhubungan graf, diperoleh temuan bahwa determinan matriks ketetanggaan graf buku segitiga $(K_{1,1,n})$ selalu bernilai nol untuk setiap

($n \geq 2$). Hasil ini menunjukkan bahwa matriks ketetanggaan graf buku segitiga bersifat singular dan mengandung ketergantungan linear yang mencerminkan karakter berulang dalam konstruksi grafnya. Temuan ini mengonfirmasi hipotesis bahwa sifat struktural graf buku segitiga ($K_{1,1,n}$) menyebabkan matriks ketetanggaannya tidak invertibel. Secara keilmuan, hasil penelitian ini relevan dalam memperkuat pemahaman mengenai hubungan antara struktur graf dan sifat aljabar matriks representasinya, serta dapat memberikan dasar bagi kajian spektral, analisis kernel matriks ketetanggaan, dan karakterisasi ketak-terhubungan linear pada graf-graf dengan pola serupa. Sebagai tindak lanjut, penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada kajian determinan untuk modifikasi graf buku segitiga, analisis *eigenvalue* dan *multiplicity*-nya, atau penerapan hasil ini dalam model jaringan yang memanfaatkan struktur graf berulang. Selain itu, penelitian dapat diperluas pada kelas graf lain untuk mengidentifikasi apakah pola kesingularan serupa muncul pada struktur graf majemuk yang memiliki sifat simetris dan redundan.

DAFTAR PUSTAKA

- Adrianto, A., Fran, F., & Kusumastuti, N. (2025). Determinan Matriks Adjacency pada Pan Graph. *BIMASTER: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 14(5), 538–547. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v14i5.99261>
- Adrianto, A., Fran, F., & Kusumastuti, N. Determinan Matriks Adjacency pada Pan Graph. *BIMASTER: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 14(5), 538–547. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v14i5.99261>
- Aliffia, A. (2024). Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Matahari dan Graf Prisma [Skripsi tidak diterbitkan]. Institut Teknologi Sumatera.
- Arman., Jufra., Somayasa, W., & Budiman, H. (2023). Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan pada Graf Roda. *Jurnal Matematika Komputasi dan Statistika*, 3(3), 432–441. <https://doi.org/10.33772/jmks.v3i3.64>
- Astuti, I. P. (2024). Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Topologi Bintang Simetris Inti Lengkap [Skripsi tidak diterbitkan]. Institut Teknologi Sumatera.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586–595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Hutabarat, H. D. M. (2020). Determinan Graf Kneser. *Jurnal Sekolah*, 4(3), 255–260.
- Komarullah, H., & Fauzan, A. (2025, August). Pemanfaatan pewarnaan graf menggunakan algoritma welch-powell dalam menyusun jadwal ronda. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 923–930).
- Komarullah, H., & Rosyidah, S. Z. (2025). Aplikasi teori dominating set dalam penentuan lokasi pelayanan pembuatan KTP di Kabupaten Jember. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, hlm. 834–840).
- Nurfadila, R. A., Saputri, M. D., & Komarullah, H. (2025). Pencarian Jalur Evakuasi Terdekat Siaga Tsunami Pantai Selatan Jember Menggunakan Algoritma Dijkstra. *AS-SUNNIYYAH*, 4(02), 102–108. <https://doi.org/10.62097/assunniyyah.v4i02.2137>
- Perkasa, S. B. (2021). Determinan Matriks Ketetanggaan dari Graf Barbel (Bn) [Skripsi tidak diterbitkan]. Institut Teknologi Sumatera.
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139–145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>

- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sari, H. M. N., Sholah, D. A., Setiawan, M. A., & Komarullah, H. (2025). Eksplorasi keterampilan berpikir komputasional siswa melalui pembelajaran teori graf berdasarkan algoritma Dijkstra. In *Proceeding of International Conference on Education and Sharia* (Vol. 2, hlm. 81–89). <https://doi.org/10.62097/2025/8>
- Somayasa, W., & Budiman, H. (2023). Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan pada Graf Roda: Matriks Ketetanggaan pada Graf Roda. *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, 3(3), 432-441. <https://doi.org/10.33772/jmks.v3i3.64>
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.