

PELABELAN $L(2, 1)$ PADA GRAF KERUCUT, GRAF TIMBANGAN, DAN GRAF BUKU SEGITIGA PENDANT

Hafif Komarullah^{1*}, Dwi Margi Utami², Sarifatul Masruroh³
^{1,2,3}Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

*Email: hafififa4@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas penerapan pelabelan $L(2,1)$ pada tiga kelas graf khusus, yaitu graf kerucut ($C_{m,n}$), graf timbangan ($S_n(C_m)$), dan graf buku segitiga pendant ($KP_{1,1,n}$) dengan tujuan menentukan nilai bilangan pelabelan minimum $\lambda_{2,1}(G)$ untuk masing-masing graf. Pelabelan $L(2,1)$ merupakan fungsi yang memberikan label bilangan bulat non-negatif pada setiap titik graf sehingga dua titik yang berjarak satu memiliki perbedaan label minimal 2, sedangkan dua titik yang berjarak dua memiliki perbedaan label minimal 1. Kajian dilakukan melalui pendekatan konstruktif dengan membangun skema pelabelan yang memenuhi seluruh syarat serta memverifikasi optimalitasnya berdasarkan struktur lokal dan global graf. Hasil penelitian menunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) = m + n + 1$, $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) = n + 3$, dan $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) = n + 3$. Penelitian ini memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan kajian pelabelan graf serta membuka peluang penelitian lanjutan terkait generalisasi pelabelan $L(2,1)$ pada kelas graf yang lebih kompleks.

Kata kunci: graf buku segitiga pendant, graf kerucut, graf timbangan, pelabelan $L(2,1)$.

1 PENDAHULUAN

Teori graf menempati posisi penting dalam matematika diskret karena mampu merepresentasikan berbagai fenomena struktural yang muncul pada jaringan kompleks. Pelabelan graf menjadi salah satu fokus kajian yang terus berkembang, terutama ketika dikaitkan dengan kebutuhan praktis dalam sistem komunikasi (Prasanna dkk., 2014), pengkodean (Prihandoko dkk., 2019), kristalografi (Kumar & Vats, 2020), dan ilmu komputer (Vinutha & Arathi, 2017). Misalkan G adalah graf sederhana yang terhubung, dengan $V(G)$ sebagai himpunan titik dan $E(G)$ sebagai himpunan sisinya. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G didefinisikan sebagai suatu fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$, sedemikian sehingga untuk setiap $u, v \in V(G)$ berlaku $|f(u) - f(v)| \geq 2$ jika $d(u, v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$ jika $d(u, v) = 2$ (Griggs & Yeh, 1992). Nilai k terbesar disebut dengan *span* (label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$). Setiap graf G jelas memiliki lebih dari satu *span*, sehingga topik ini membahas nilai *span* minimum dari graf G yang dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Shao dkk., 2008).

Sejumlah penelitian sebelumnya telah mengkaji berbagai kelas graf untuk menentukan nilai *span* minimum pada pelabelan $L(2,1)$. Graf siklus C_n dan graf lintasan P_n diketahui memiliki *span* minimum yang sama, yaitu sebesar 4. Graf bintang S_n serta graf roda W_n memiliki *span* minimum sebesar $n + 1$ sesuai hasil yang dilaporkan oleh Griggs dan Yeh (1992). Graf Sierpinski $S_{n,m}$ untuk kasus $m = 2$ dan $m = 3$ juga tercatat mempunyai *span* minimum yang identik, yakni 4 (Sagala & Susiana, 2017). Graf lolipop $L_{m,n}$ dan graf pendulum P_n^k masing-masing memiliki *span* minimum

sebesar $2m - 1$) dan $k + 1$ seperti yang ditunjukkan oleh (Umam dkk., 2022). Kumpulan hasil lainnya terkait pelabelan $L(2,1)$ dapat dijumpai dalam studi (Fatimah dkk., 2016); Aminulloh & Afif, 2019; Komarullah, 2020; Halikin & Komarullah, 2022; Komarullah dkk., 2022; Komarullah, 2023; Komarullah dkk., 2025a; dan Komarullah dkk., 2025b).

Penelitian ini bertujuan merumuskan konstruksi pelabelan $L(2,1)$ yang valid dan minimal pada graf kerucut, graf timbangan, dan graf buku segitiga pendant serta menganalisis karakteristik $\lambda_{2,1}(G)$ yang muncul dari masing-masing struktur. Ketiga graf tersebut dipilih karena belum dianalisis oleh peneliti sebelumnya, serta subgraph dari ketiga graf tersebut sudah diteliti. Pendekatan konstruktif digunakan untuk membangun skema pelabelan, diikuti verifikasi matematis yang menilai optimalitas berdasarkan jarak antar titik dan batasan yang berlaku. Hasil penelitian diharapkan memperkaya khazanah teori pelabelan graf serta menyediakan landasan bagi eksplorasi lebih lanjut mengenai pelabelan jarak pada graf-graf dengan struktur lebih kompleks.

2 METODE

Penelitian ini menerapkan pendekatan analisis konstruktif untuk menentukan pelabelan $L(2,1)$ yang minimal pada graf kerucut, graf timbangan, dan graf buku segitiga pendant melalui pembentukan fungsi pelabelan yang memenuhi syarat selisih label minimal berdasarkan jarak antar titik serta pembuktian matematis untuk memastikan optimalitasnya. Pelaksanaan penelitian dirumuskan melalui tahapan sistematis berikut.

- Menentukan graf yang akan diteliti.
- Merepresentasikan graf dalam himpunan titik dan sisi untuk memudahkan analisis jarak antar titik.
- Membangun fungsi pelabelan yang memenuhi aturan $L(2,1)$ pada graf yang diteliti dengan order tertentu.
- Menganalisis pola pelabelan untuk menentukan rumus umum.
- Menyusun teorema dan melakukan verifikasi melalui pembuktian matematis bahwa pelabelan yang diperoleh tidak dapat direduksi menjadi span yang lebih kecil.

Dalam membuktikan nilai minimum span dari graf yang diteliti, digunakan beberapa lemma sebagai berikut.

Lemma 1. (Lum, 2007)

Jika H adalah sebuah subgraf dari G , maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Lemma 2. (Griggs & Yeh, 1992)

Misalkan W_n adalah sebuah graf roda dengan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(W_n) = n + 1$.

Lemma 3. (Griggs & Yeh, 1992)

Misalkan $K_{1,1,n}$ adalah sebuah graf buku segitiga dengan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(K_{1,1,n}) = n + 3$.

Lemma 4. (Griggs & Yeh, 1992)

Misalkan S_n adalah sebuah graf bintang dengan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$.

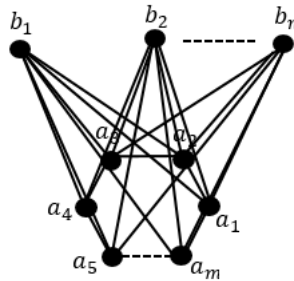
3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil analisis pelabelan $L(2,1)$ pada tiga kelas graf yang memiliki karakteristik struktural berbeda, yaitu graf kerucut, graf timbangan, dan graf buku segitiga pendant. Setiap graf dikaji berdasarkan konfigurasi titik dan keterhubungannya untuk menentukan pola pelabelan yang memenuhi syarat jarak, yakni selisih label minimal 2 untuk titik yang bertetangga dan minimal 1 untuk titik yang berjarak dua. Analisis dilakukan dengan menyusun

konstruksi pelabelan yang valid. Kajian pada setiap graf dipaparkan secara sistematis dimulai dari deskripsi sifat topologinya, kemudian dilanjutkan dengan pembangunan fungsi pelabelan, dan pembuktian validitasnya.

3.1 Graf kerucut

Graf kerucut dengan order dan ukuran $m + n$, dinotasikan dengan $C_{m,n}$, adalah graf yang isomorfis dengan $C_m + \bar{K}_n$ dengan menghubungkan setiap graf kosong ke setiap titik dari graf siklus C_m . Graf kerucut memiliki himpunan titik $V(C_{m,n}) = \{a_i | i \in [1, m]\} \cup \{b_j | j \in [1, n]\}$ dan himpunan sisi $E(C_{m,n}) = \{a_1 a_m, a_i a_{i+1} | i \in [1, m-1]\} \cup \{b_j a_i | i \in [1, m], j \in [1, n]\}$. Contoh dari graf kerucut dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf kerucut

Teorema 1. Misalkan graf kerucut $C_{m,n}$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) = m + n + 1$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) = m + n + 1$, maka harus ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \geq m + n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \leq m + n + 1$. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \geq m + n + 1$. Perhatikan bahwa salah satu subgraf dari graf kerucut adalah graf roda W_m . Berdasarkan Lemma 2, diperoleh bahwa $\lambda_{2,1}(W_m) = m + 1$ dengan titik pusat (titik berderajat m) dilabeli dengan label 1. Karena pada graf kerucut setiap titik b_j untuk $j = 1, 2, \dots, n$ berjarak dua, maka $f(b_j) \neq f(b_k)$ untuk $j \neq k$. Akibatnya, dibutuhkan minimal $m + n + 1$ label untuk melabeli graf kerucut $C_{m,n}$, sehingga terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \geq m + n + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \leq m + n + 1$ dengan membangun fungsi yang memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Misalkan fungsi $f: V(C_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, m + n + 1\}$ didefinisikan sebagai berikut.

Untuk m ganjil

$$f(a_i) = \begin{cases} 2i & , \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \\ m + 1, & \text{ untuk } i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \\ 2i - 5, & \text{ untuk } i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1, \dots, m. \end{cases}$$

$$f(b_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } j = 1, \\ m + j + 1, & \text{ untuk } j = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk m genap

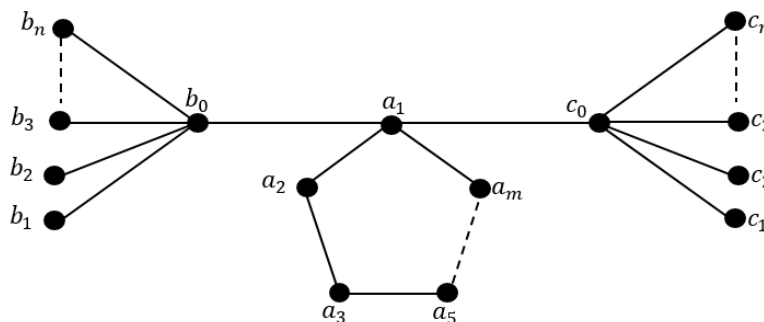
$$f(a_i) = \begin{cases} 2i & , \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}, \\ 2i - 5, & \text{ untuk } i = \frac{m}{2} + 1, \dots, m - 1, \\ m + 1, & \text{ untuk } i = m. \end{cases}$$

$$f(b_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } j = 1, \\ m + j + 1, & \text{ untuk } j = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa dengan menggunakan fungsi f untuk melabeli graf kerucut $C_{m,n}$, maka label setiap dua titik bertetangga memiliki selisih minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki selisih label setidaknya satu. Jelas bahwa fungsi f memenuhi syarat pelabelan $L(2,1)$, sehingga $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \leq m + n + 1$. Karena $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \geq m + n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) \leq m + n + 1$, maka terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) = m + n + 1$. ■

3.2 Graf timbangan

Graf timbangan dengan order dan ukuran $m + 2(n + 1)$, dinotasikan dengan $S_n(C_m)$, adalah graf yang dibangun dari dua buah graf bintang S_{n+1} dan satu graf siklus C_m dengan menempelkan salah satu pendant dari masing-masing graf bintang S_{n+1} ke salah satu titik pada graf siklus C_m . Titik dan sisi pada graf timbangan dinotasikan dengan $V(S_n(C_m)) = \{a_i | i \in [1, m]\} \cup \{b_j | j \in [1, n]\} \cup \{c_k | k \in [1, n]\}$ dan $E(S_n(C_m)) = \{a_1 b_0, a_1 c_0, a_1 a_m, a_i a_{i+1} | i \in [1, m - 1]\} \cup \{b_0 b_j | j \in [1, n]\} \cup \{c_0 c_k | k \in [1, n]\}$. Gambar 2 adalah notasi titik dan sisi dari graf timbangan.



Gambar 2. Graf timbangan

Teorema 2. Misalkan graf timbangan $S_n(C_m)$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) = n + 3$.

Bukti. Pertama, akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) \geq n + 3$. Perhatikan titik b_0, b_j , dan a_1 dengan $j = 1, 2, \dots, n$ merupakan graf siklus dengan order $n + 1$. Diketahui bahwa berdasarkan Lemma 4, diperoleh $\lambda_{2,1}(S_{n+1}) = n + 2$. Graf bintang memiliki diameter 2, sehingga setiap labelnya harusnya berbeda. Untuk mendapatkan label minimal, maka titik c_0 diberi label 1, sehingga titik c_k harus dilabeli dengan label $3, 4, \dots, n + 3$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) \geq n + 3$. Kedua, akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) \leq n + 3$ yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$ pada graf timbangan. Definisikan fungsi $f: V(S_n(C_m)) \rightarrow \{0, 1, \dots, n + 3\}$ sebagai berikut.

$$f(b_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } j = 0, \\ j + 1, & \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

$$f(c_k) = \begin{cases} 1 & , \text{ untuk } k = 0, \\ k + 3, & \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk $n \equiv 0 \pmod 3$

$$f(a_i) = \begin{cases} n + 2, & \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & , \text{ untuk } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 4 & , \text{ untuk } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Untuk $n \equiv 1 \pmod 3$

$$f(a_i) = \begin{cases} n + 2, & \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n, \\ 2 & , \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n - 2, \\ 4 & , \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n - 1, \\ 3 & , \text{ untuk } i = n - 2, \\ 1 & , \text{ untuk } i = n - 1, \\ 4 & , \text{ untuk } i = n, \end{cases}$$

Untuk $n \equiv 2 \pmod 3$

$$f(a_i) = \begin{cases} n + 2, & \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & , \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n, \\ 4 & , \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 3 & , \text{ untuk } i = n, \end{cases}$$

Jelas bahwa label setiap titik yang bertetangga memiliki perbedaan label minimal dua dan titik berjarak dua memiliki perbedaan label minimal satu. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$, sehingga $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) \leq n + 3$ dan $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) \geq n + 3$. Tebukti bahwa $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) = n + 3$. ■

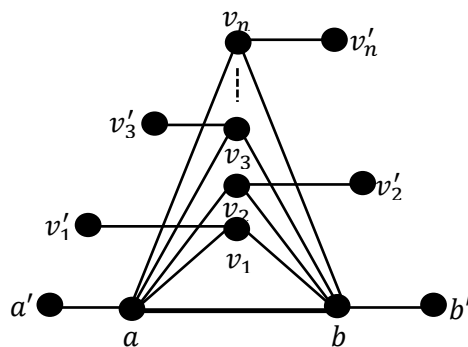
3.3 Graf buku segitiga pendant

Graf buku segitiga $K_{1,1,n}$ adalah graf yang dibangun dari n graf siklus C_3 yang ditempelkan salah satu sisinya menjadi satu. Graf buku segitiga pendant $KP_{1,1,n}$ adalah modifikasi dari graf buku segitiga yang isomorfis dengan graf $K_{1,1,n} + \bar{K}_n$ dengan menambahkan pendant pada setiap titik dari . graf buku segitiga. Himpunan titik dan sisi pada graf buku segitiga pendant dinotasikan sebagai berikut.

$$V(KP_{1,1,n}) = \{a, a'\} \cup \{b, b'\} \cup \{v_i, v'_i | i \in [1, n]\}$$

$$E(KP_{1,1,n}) = \{aa', ab, bb'\} \cup \{av_i, bv_i | i \in [1, n]\} \cup \{v_i v'_i | i \in [1, n]\}$$

Gambar 3 adalah contoh dari graf buku segitiga pendant.



Gambar 3. Graf buku segitiga pendant

Teorema 3. Misalkan graf buku segitiga pendant $KP_{1,1,n}$ dengan $n \geq 2$, $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) = m + n + 1$.

Bukti. Dengan cara yang sama untuk membuktikan bahwa $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) = m + n + 1$, maka harus ditunjukkan $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \geq m + n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \leq m + n + 1$. Pandang bahwa graf buku segitiga $K_{1,1,n}$ adalah subgraf dari graf buku segitiga pendant $KP_{1,1,n}$, sehingga berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 3 diperoleh $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \geq \lambda_{2,1}(K_{1,1,n}) = m + n + 1$. Terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \geq m + n + 1$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \leq m + n + 1$ dengan membangun fungsi yang memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Definisikan fungsi $f: V(KP_{1,1,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + n + 1\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(a) &= 0. \\ f(a') &= n + 2. \\ f(b) &= n + 3. \\ f(b') &= 1. \\ f(v_i) &= i + 1, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n. \\ f(v'_i) &= \begin{cases} i + 3, & \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ 1 & , \text{ untuk } i = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Dengan menerapkan fungsi f pada graf buku segitiga pendant $KP_{1,1,n}$, diperoleh bahwa setiap pasangan titik yang saling bertetangga memiliki perbedaan label sekurang-kurangnya dua, sedangkan titik-titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu. Kondisi tersebut menunjukkan bahwa fungsi f telah memenuhi ketentuan pelabelan $L(2,1)$, sehingga, terbukti bahwa $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \leq m + n + 1$. Karena $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \geq m + n + 1$ dan $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) \leq m + n + 1$, maka terbukti $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) = m + n + 1$. ■

4 KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menerapkan pelabelan $L(2,1)$ pada tiga kelas graf khusus, yaitu graf kerucut, graf timbangan, dan graf buku segitiga pendant. Melalui pendekatan konstruktif, skema pelabelan yang diusulkan terbukti memenuhi seluruh ketentuan pelabelan $L(2,1)$ serta memberikan nilai span minimum yang optimal untuk masing-masing graf. Nilai *span* minimum yang diperoleh ialah $\lambda_{2,1}(C_{m,n}) = m + n + 1$, $\lambda_{2,1}(S_n(C_m)) = n + 3$, dan $\lambda_{2,1}(KP_{1,1,n}) = n + 3$. Penelitian ini berkontribusi dalam memperkaya literatur pelabelan graf serta membuka peluang untuk pengembangan kajian lanjutan, khususnya generalisasi pelabelan $L(2,1)$ pada kelas graf yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Aminulloh, M., & Afif, R. (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2, 1)$ pada graf petersen $P(n, 1)$* (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan $L(2, 1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2). <https://core.ac.uk/reader/290089130>
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>

- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Komarullah, H. (2020). Pelabelan $L(2, 1)$ Pada Graf Buku Segi Tiga, Graf Kerucut, Graf Tadpole dan Graf Dumbbell Serta Graf Hasil Identifikasi Titik Dari Graf Buku Segi Tiga dan Graflintasan. *Diambil kembali dari* <http://repository.unej.ac.id/handle/123456789/99497>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025a, August). Span Terkecil dari Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf Dumbbell. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 956-963).
- Komarullah, H., Im, F. A. J., & Maulidi, Z. J. K. (2025b, August). Nilai minimum span pelabelan berbasis jarak pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 917-922).
- Kumar, A., & Vats, A. K. (2020). Application of graph Labeling in Crystallography. *Proc. Mater. Today*. 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.09.371>
- Lum, A. (2007). Upper Bound on $L(2,1)$ -labelling Number of Graphs with Maximum Degree Δ . Retrieved from <https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf>
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139-145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Sierpinski $S(n,k)$. *Karismatika*, 3(2), 130-139.
- Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The $L(2, 1)$ -labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, 21(1), 37-41. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029>
- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). $L(2, 1)$ Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>
- Vinutha, M. S., & Arathi, P. (2017). Applications of graph coloring and labeling in computer science. *International Journal on Future Revolution in Computer Science and Communication Engineering*, 3(8), 14-16. https://www.researchgate.net/publication/353285499_Applications_of_Graph_Coloring_and_Labeling_in_Computer_Science