

## NILAI MINIMAL SPAN PELABELAN JARAK DUA PADA GRAF BINTANG SIKLUS

Hafif Komarullah<sup>1\*</sup>, Ahmad Fauzan<sup>2</sup>, Abdul Rosi<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

\*Email: [hafififa4@gmail.com](mailto:hafififa4@gmail.com)

### ABSTRAK

Penelitian ini membahas penentuan nilai minimal span pelabelan jarak dua atau pelabelan  $L(2,1)$  pada graf bintang siklus yang dinotasikan dengan  $(C_m(S_n))$ . Graf bintang siklus dibangun dari graf bintang  $(S_{n+1})$  dan graf siklus  $(C_m)$  dengan menyalin graf bintang sebanyak  $m$  salinan, kemudian menempelkan salah satu titik pendant dari setiap salinan tersebut pada masing-masing titik graf siklus. Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik untuk mengkaji sifat struktural graf serta teknik pendeteksian pola untuk menemukan keteraturan label yang memenuhi aturan pelabelan  $L(2,1)$ . Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai span terkecil dari graf bintang siklus. Berdasarkan konstruksi pelabelan dan pembuktian telah dilakukan, diperoleh hasil bahwa nilai minimal span pelabelan  $L(2,1)$  pada graf bintang siklus adalah  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) = n + 2$ . Temuan ini memberikan kontribusi dalam pengembangan teori pelabelan graf, khususnya pada kajian pelabelan jarak dua untuk graf terstruktur kompleks.

**Kata kunci:** pelabelan  $L(2,1)$ , nilai *span* minimum, graf bintang siklus.

### 1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang memiliki peran penting dalam berbagai aplikasi, terutama dalam pemodelan sistem jaringan (Prasanna dkk., 2014), komunikasi (Shen dkk., 2022), kristalografi (Prathik dkk., 2016), jaringan otak (Sporns, 2018), dan pengkodean (Prihandoko dkk., 2019). Salah satu topik yang banyak dikaji dalam teori graf adalah pelabelan titik, yaitu pemberian bilangan pada setiap titik graf dengan aturan tertentu untuk memenuhi kebutuhan praktis seperti penghindaran interferensi pada jaringan komunikasi nirkabel. Salah satu jenis pelabelan yang relevan untuk masalah tersebut adalah pelabelan jarak dua atau pelabelan  $L(2,1)$ , yang pertama kali diperkenalkan oleh Griggs dan Yeh (1992). Pada pelabelan ini, dua titik yang berjarak satu harus memiliki selisih label minimal dua, sedangkan titik yang berjarak dua harus memiliki selisih label minimal satu. Nilai span minimum dari pelabelan  $L(2,1)$  pada suatu graf menjadi fokus penting karena berkaitan dengan efisiensi penggunaan frekuensi atau sumber daya analog dalam jaringan. Secara matematis nilai minimal *span* dari suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $\lambda_{2,1}(G)$  (Shao dkk., 2008).

Beragam penelitian sebelumnya telah mengkaji berbagai kelas graf dalam rangka menentukan nilai *span* minimum pada pelabelan  $L(2,1)$ . Pada graf siklus  $(C_n)$  dan graf lintasan  $(P_n)$ , telah dibuktikan bahwa kedua graf tersebut memiliki nilai *span* minimum sebesar 4. Sementara itu, untuk graf bintang  $(S_n)$  dan graf roda  $(W_n)$ , nilai *span* minimum yang diperoleh adalah  $n + 1$  (Griggs & Yeh, 1992). Penelitian terhadap graf Sierpinski  $(S_{n,m})$  juga menunjukkan bahwa pada kasus  $m = 2$  dan  $m = 3$ , nilai *span* minimumnya tetap konstan, yakni sebesar 4 (Sagala & Susiana, 2017). Adapun graf lolipop  $(L_{m,n})$  dan graf pendulum  $(P_n^k)$  masing-masing

memiliki nilai *span* minimum sebesar  $2m - 1$  dan  $k + 1$  sebagaimana dilaporkan oleh Umam dkk. (2022). Selain itu, berbagai kontribusi lain terkait pelabelan  $L(2,1)$  dapat ditemukan dalam sejumlah studi yang semakin memperkaya literatur, antara lain Fatimah dkk. (2016), Aminulloh & Afif (2019), Halikin & Komarullah (2022), Komarullah dkk. (2022), Komarullah (2023), serta Komarullah dkk. (2025a; 2025b).

Graf bintang siklus, yang dinotasikan dengan  $(C_m(S_n))$ , dibentuk dari graf bintang  $(S_n)$  dan graf siklus  $(C_m)$  dengan menyalin graf bintang sebanyak  $m$  dan menghubungkan salah satu titik pendant dari setiap salinan ke masing-masing titik pada graf siklus. Kompleksitas struktur ini menimbulkan pertanyaan mengenai bagaimana pola pelabelan  $L(2,1)$  dapat dikonstruksi secara optimal serta berapa nilai minimum *span* yang dapat dicapai. Berdasarkan uraian tersebut, tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai minimal *span* pelabelan  $L(2,1)$  pada graf bintang siklus  $(C_m(S_n))$ .

## 2 METODE

Metode penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif aksiomatik yang bertujuan mengkaji struktur graf bintang siklus  $(C_m(S_n))$  secara formal melalui definisi dan lemma. Tahapan penelitian dimulai dengan membangun representasi struktural graf, yaitu  $m$  salinan graf bintang  $(S_n)$  yang masing-masing dihubungkan ke setiap titik pada graf siklus  $(C_m)$  melalui salah satu titik pendant. Struktur tersebut dianalisis untuk menentukan jarak antar titik, pola ketetanggaan, serta karakteristik yang menentukan syarat pelabelan  $L(2,1)$ . Selanjutnya dirumuskan lemma-lemma teoretis untuk menentukan batas bawah *span* pelabelan sebagai landasan analisis matematis. Tahap berikutnya adalah pendeteksian pola pelabelan dengan mengidentifikasi keteraturan label pada berbagai konfigurasi graf untuk memperoleh konstruksi pelabelan yang memenuhi seluruh aturan jarak. Konstruksi pola yang diperoleh kemudian divalidasi dengan menunjukkan bahwa pelabelan tersebut tidak hanya memenuhi aturan  $L(2,1)$ , tetapi juga mencapai batas bawah yang telah dibuktikan, sehingga terbukti optimal. Melalui rangkaian proses tersebut, penelitian ini mampu menentukan nilai minimal *span* pelabelan  $L(2,1)$  pada graf bintang siklus secara sistematis dan terverifikasi. Berikut beberapa lemma dalam membuktikan teorema nilai *span* minimum.

**Lemma 1.** (Lum, 2007) Jika  $H$  adalah sebuah subgraf dari  $G$ , maka  $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$ .

**Lemma 2.** (Griggs & Yeh, 1992) Misalkan  $S_n$  adalah sebuah graf bintang dengan  $n \geq 2$ , maka  $\lambda_{2,1}(S_n) = n + 1$ .

## 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil analisis pelabelan  $L(2,1)$  pada graf bintang siklus  $(C_m(S_n))$  yang diperoleh melalui penerapan pendekatan deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola. Analisis diawali dengan mengidentifikasi karakteristik struktural graf yang memengaruhi pembentukan pola pelabelan. Berdasarkan struktur tersebut, diturunkan batas bawah nilai *span* yang mungkin dicapai, kemudian dikembangkan konstruksi pelabelan yang dirancang untuk memenuhi seluruh ketentuan pelabelan  $L(2,1)$ . Selanjutnya dilakukan verifikasi terhadap konsistensi pelabelan dan pencapaian *span* minimum untuk memastikan optimalitas hasil yang diperoleh.

**Teorema 1.** Misalkan graf bintang siklus  $(C_m(S_n))$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n \geq 4$ ,  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) = n + 2$ .

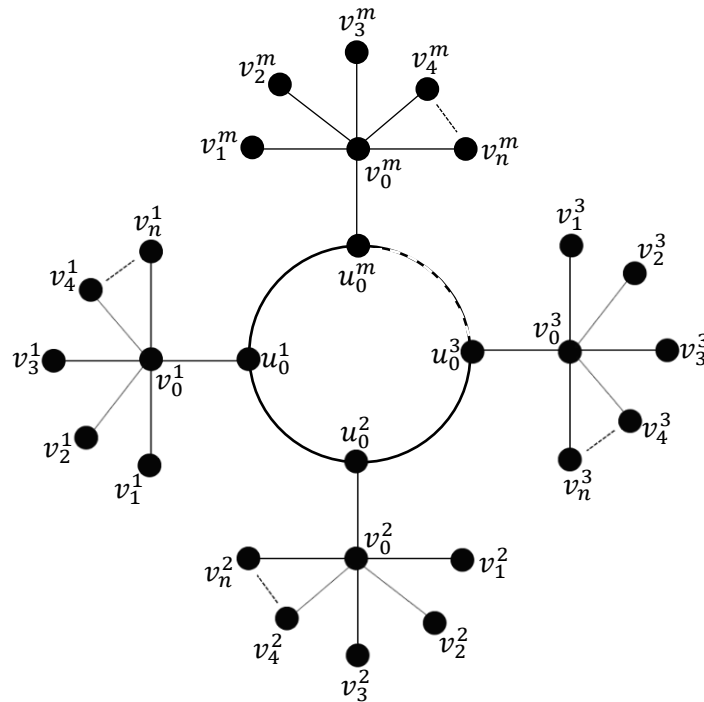
**Bukti.** Langkah pertama dalam membuktikan nilai minimum span yaitu menotasikan titik dan sisi pada graf bintang siklus ( $C_m(S_n)$ ). Penotasian titik dan sisi dari graf bintang siklus ( $C_m(S_n)$ ) adalah sebagai berikut.

$$V(C_m \odot S_n) = \{u_0^j | j = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_0^j | j = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_i^j | i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$$

$$E(C_m \odot S_n) = \{u_0^j v_0^j | j = 1, 2, \dots, m\} \cup \{u_0^j u_0^{j+1} | j = 1, 2, \dots, m-1\}$$

$$\cup \{v_0^j v_i^j | i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$$

Gambar 1 adalah ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf bintang siklus ( $C_m(S_n)$ ).



**Gambar 1.** Graf bintang siklus ( $C_m(S_n)$ )

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) \geq n + 2$ . Perhatikan bahwa graf bintang  $S_{n+1}$  adalah subgraf dari graf bintang siklus ( $C_m(S_n)$ ). Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) \geq \lambda_{2,1}(S_{n+1}) = n + 2$ , sehingga  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) \geq n + 2$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) \leq n + 2$  dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan  $L(2,1)$ . Definisikan fungsi  $f: V(C_m(S_n)) \rightarrow \{0, 1, \dots, n + 2\}$  sebagai berikut.

1. Kasus  $m \equiv 0 \pmod 3$

$$f(u_0^j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3, \\ 4, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

$$f(v_0^j) = n + 2, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

Untuk  $j \equiv 1 \pmod 3$

$$f(v_i^j) = i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk  $j \equiv 2 \pmod 3$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ i, & \text{untuk } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk  $j \equiv 0 \pmod 3$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ i+2, & \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n. \end{cases}$$

2. Kasus  $m \equiv 1 \pmod 3$

$$f(u_0^j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-2, \\ 4, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-1, \\ 3, & \text{untuk } j = n-2, \\ 1, & \text{untuk } j = n-1, \\ 4, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

$$f(v_0^j) = n+2, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

Untuk  $j \equiv 1 \pmod 3$  dan  $j \neq n$

$$f(v_i^j) = i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk  $j \equiv 2 \pmod 3$  dan  $j \neq n-2$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ i, & \text{untuk } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk  $j \equiv 0 \pmod 3$  dan  $j \neq n-1$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ i+2, & \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk  $j = n-2$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ i+2, & \text{untuk } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk  $j = n-1$

$$f(v_i^j) = i+2, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk  $j = n$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ i+2, & \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n. \end{cases}$$

3. Kasus  $m \equiv 2 \pmod 3$

$$f(u_0^j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n-1, \\ 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } j \neq n, \\ 4, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{untuk } j = n-1, \\ 3, & \text{untuk } j = n. \end{cases}$$

$$f(v_0^j) = n+2, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

Untuk  $j \equiv 1 \pmod 3$  dan  $j \neq n-1$

$$f(v_i^j) = i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk  $j \equiv 2 \pmod 3$  dan  $j \neq n$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i-1, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ i, & \text{untuk } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk  $j \equiv 0 \pmod 3$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i - 1, & \text{untuk } i = 1, 2, 3, \\ i + 2, & \text{untuk } i = 4, 5, \dots, n. \end{cases}$$

Untuk  $j = n - 1$

$$f(v_i^j) = i + 2, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

Untuk  $j = n$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i - 1, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ i + 2, & \text{untuk } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

Dapat diverifikasi bahwa label setiap titik yang berjarak satu memiliki selisih label minimal dua dan titik yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu. Terbukti bahwa  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) \leq n + 2$ , sehingga  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) = n + 2$ . ■

Secara struktural, graf bintang siklus merupakan gabungan antara graf siklus dan beberapa graf bintang yang menempel pada setiap titik siklus. Kehadiran titik pusat graf bintang yang memiliki derajat tinggi menyebabkan kebutuhan rentang label yang lebih besar dibandingkan graf siklus atau graf lintasan. Hal ini selaras dengan Lemma 2 yang menyatakan bahwa graf bintang  $S_n$  memiliki nilai minimal span sebesar  $n + 2$ . Karena graf bintang merupakan subgraf dari graf bintang siklus, maka batas bawah span graf bintang siklus tidak dapat lebih kecil dari nilai tersebut. Konstruksi pelabelan yang diperoleh dalam penelitian ini menunjukkan bahwa pola label dapat diatur secara periodik pada titik-titik siklus, sementara titik pusat dan titik pendant pada setiap graf bintang diberi label sedemikian rupa sehingga memenuhi syarat perbedaan label minimal pada jarak satu dan dua. Pola ini memperlihatkan bahwa meskipun struktur graf semakin kompleks akibat penggabungan dua jenis graf berbeda, nilai minimal span tetap dapat dikontrol dan tidak meningkat secara signifikan melampaui graf bintang penyusunnya.

Jika dibandingkan dengan penelitian sebelumnya, hasil ini konsisten dengan temuan Griggs dan Yeh (1992) yang menunjukkan bahwa graf bintang memiliki nilai span relatif besar dibandingkan graf lintasan dan graf siklus. Selain itu, hasil ini juga sejalan dengan studi pada graf hasil operasi seperti graf lollipop dan graf pendulum (Umam dkk., 2022), di mana struktur dengan titik berderajat tinggi menjadi faktor dominan dalam menentukan nilai minimal span. Dengan demikian, penelitian ini memperkuat dugaan bahwa komponen graf dengan derajat maksimum besar berperan sebagai penentu utama nilai span pelabelan  $L(2,1)$  pada graf gabungan.

Implikasi teoretis dari hasil ini adalah bahwa graf bintang siklus dapat dijadikan model untuk menguji konsistensi pola pelabelan pada graf majemuk yang memadukan struktur siklik dan struktur pohon. Dari sisi aplikasi, hasil ini relevan dalam perancangan jaringan komunikasi yang memiliki topologi melingkar dengan simpul pusat bercabang, karena memberikan batas minimum penggunaan sumber daya frekuensi secara efisien.

#### 4 KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menentukan nilai minimal span pelabelan  $L(2,1)$  pada graf bintang siklus  $(C_m(S_n))$  melalui pendekatan deskriptif aksiomatik dan analisis pola pelabelan. Berdasarkan kajian terhadap struktur graf serta konstruksi pelabelan yang memenuhi seluruh ketentuan jarak, diperoleh bahwa nilai *span* minimum graf bintang siklus ditentukan secara langsung oleh jumlah titik pendant pada graf bintang penyusunnya. Hasil utama penelitian menunjukkan bahwa nilai minimal *span* untuk graf bintang siklus adalah  $\lambda_{2,1}(C_m(S_n)) = n + 2$ . Temuan ini menegaskan bahwa kombinasi struktur siklik dan struktur graf bintang menghasilkan pola pelabelan yang tetap terkontrol dan dapat diprediksi secara matematis. Selain memberikan

kontribusi terhadap perluasan kajian pelabelan  $L(2,1)$ , hasil ini juga membuka peluang untuk penelitian lanjutan pada kelas graf campuran lainnya dengan konfigurasi yang lebih kompleks.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aminulloh, M., & Afif, R. (2019). *Minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf petersen  $P(n, 1)$*  (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2). <https://core.ac.uk/reader/290089130>
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595. <https://doi.org/10.1137/0405048>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025a, August). Span Terkecil dari Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Graf Dumbbell. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 956-963).
- Komarullah, H., Im, F. A. J., & Maulidi, Z. J. K. (2025b, August). Nilai minimum span pelabelan berbasis jarak pada graf hasil operasi korona lintasan dan siklus. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 917-922).
- Lum, A. (2007). Upper Bound on  $L(2,1)$ -labelling Number of Graphs with Maximum Degree  $\Delta$ . Retrieved from <https://www.whitman.edu/documents/academics/mathematics/lumaa.pdf>
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139-145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>
- Prathik, A., Uma, K., & Anuradha, J. (2016). An overview of application of graph theory. *International Journal of ChemTech Research*, 9(2), 242-248.
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan  $L(2,1)$  pada Graf Sierpinski  $S(n,k)$ . *Karismatika*, 3(2), 130-139.
- Shao, Z., Yeh, R. K., & Zhang, D. (2008). The  $L(2, 1)$ -labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters*, 21(1), 37-41. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.029>

- Shen, Y., Zhang, J., Song, S. H., & Letaief, K. B. (2022). Graph neural networks for wireless communications: From theory to practice. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 22(5), 3554-3569.
- Sporns, O. (2018). Graph theory methods: applications in brain networks. *Dialogues in clinical neuroscience*, 20(2), 111-121.
- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022, February). L (2, 1) Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press.  
<https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>