

PELABELAN RATA-RATA SKOLEM *DIFFERENCE* PADA GRAF GUNUNG API DAN GRAF $C_3 \triangleright S_n$

Hafif Komarullah^{1*}, Zulfi Jummala Khilda Maulidi², Pudji Rahmawati³
^{1,2,3}Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia

*Email: hafif4@gmail.com

ABSTRAK

Graf G dengan p simpul dan q sisi disebut graf rata-rata skolem *difference* jika setiap simpul dapat diberi label berbeda dari himpunan bilangan 1 sampai $p + q$, dan dari pelabelan itu dapat dibentuk pelabelan sisi yang memberi setiap sisi satu nilai unik dari 1 sampai q . Nilai suatu sisi ditentukan dari selisih label kedua simpul yang dihubungkannya. Jika selisih tersebut genap, nilai sisi adalah setengah dari selisih mutlak. Jika selisihnya ganjil, nilai sisi adalah setengah dari selisih mutlak tersebut setelah ditambah satu. Dengan aturan ini, seluruh sisi memperoleh nilai berbeda sehingga membentuk pelabelan yang bijektif. Penelitian ini bertujuan menentukan pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ yang memenuhi aturan pelabelan tersebut. Metode yang digunakan meliputi konstruksi kedua graf, pemberian label simpul sesuai aturan pelabelan, serta verifikasi kesesuaian selisih dan nilai rata-rata pada setiap sisi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua graf tersebut dapat dilabeli dengan skema pelabelan rata-rata skolem *difference*. Dengan demikian, graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ dikategorikan sebagai graf rata-rata skolem *difference*.

Kata kunci: graf gunung api, graf $C_3 \triangleright S_n$, pelabelan rata-rata skolem *difference*

1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang penting dalam matematika diskrit yang memiliki peran signifikan dalam berbagai bidang, seperti sistem jaringan (Prasanna dkk., 2014), pendidikan (Sholehah & Komarullah, 2025), optimasi jaringan (Komarullah & Rosyidah, 2025), kriptografi (Prihandoko dkk., 2019), dan pencarian jalur transportasi (Nurfadila dkk., 2025). Salah satu kajian yang berkembang pesat dalam teori graf adalah pelabelan graf, yaitu pemberian label bilangan bulat kepada simpul atau sisi graf dengan mengikuti aturan tertentu (Halikin & Komarullah, 2022). Berdasarkan domainnya, pelabelan graf dibedakan menjadi pelabelan simpul, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Konsep pelabelan rata-rata skolem pertama kali diperkenalkan oleh Balaji dkk. (2007). Berdasarkan gagasan tersebut, Murugan dan Subramanian (2011) kemudian mengembangkan pelabelan jenis baru yang dikenal sebagai pelabelan rata-rata skolem *difference*. Pola label yang unik pada pelabelan rata-rata skolem *difference* dapat digunakan dalam kriptografi sebagai pembangun kunci untuk menenkripsi dan mendekripsi pesan. Misalkan, diberikan graf G dengan p menyatakan banyak simpul dan q menyatakan banyak sisi pada graf G . Pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf G adalah sebuah fungsi injektif yang didefinisikan $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, maka $f^*(u, v) = \frac{|f(u) - f(v)|}{2}$ jika $f(u) - f(v)$ genap dan $f^*(u, v) = \frac{|f(u) - f(v)| + 1}{2}$ jika $f(u) + f(v)$

ganjil. Graf yang memenuhi pelabelan rata-rata skolem *difference* disebut graf rata-rata skolem *difference*.

Beberapa peneliti terdahulu sudah mengkaji beberapa kelas graf yang merupakan graf rata-rata skolem *difference*. Murugan dan Subramanian (2011) menunjukkan bahwa graf H adalah graf rata-rata skolem *difference*. Parmar & Vaghela (2019) menunjukkan bahwa graf sapu, graf sisir, graf dua bintang, dan graf $K_{1,3} * K_{1,n}$ adalah graf rata-rata skolem *difference*. Selanjutnya, Fajria dkk. (2023) membuktikan bahwa graf H-bintang $H(S_n)$ juga merupakan graf rata-rata skolem *difference*. Namun, sejauh ini kajian yang secara khusus membahas pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ masih belum ada.

Berdasarkan telaah literatur dan kesenjangan penelitian yang masih ada, penelitian ini dilakukan untuk menelaah keberadaan fungsi pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ sekaligus mengonstruksi bentuk pelabelannya secara eksplisit. Dengan demikian, tujuan utama penelitian ini adalah mengkaji dan membuktikan bahwa graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ dapat diberi pelabelan rata-rata skolem *difference* menggunakan suatu konstruksi tertentu yang valid secara matematis.

2 METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan teoretis melalui analisis struktur graf dan konstruksi pelabelan secara langsung. Tahapan penelitian diawali dengan mendefinisikan secara formal karakteristik graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$. Pada tahap ini dilakukan penyusunan struktur graf, penentuan himpunan simpul dan sisi, serta identifikasi keterhubungan antarsimpul untuk memperoleh representasi matematis kedua graf secara lengkap. Setelah konstruksi graf terbentuk, langkah berikutnya adalah memberikan label pada setiap simpul menggunakan himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sesuai definisi pelabelan rata-rata skolem *difference*. Pemberian label dilakukan secara sistematis untuk memastikan pemetaan bersifat injektif dan memungkinkan terbentuknya pelabelan sisi yang memenuhi kriteria nilai unik dari 1 sampai q sesuai aturan pelabelan rata-rata skolem *difference*.

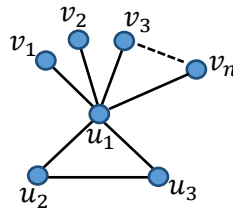
Verifikasi dilakukan dengan memeriksa bahwa setiap sisi memperoleh nilai berbeda, tidak terjadi pengulangan, dan seluruh nilai dalam rentang 1 sampai q tercakup. Selain itu, dilakukan analisis konsistensi antara konstruksi label simpul, nilai selisih, serta karakteristik struktur graf untuk memastikan bahwa pelabelan memenuhi definisi graf rata-rata skolem *difference*. Melalui proses konstruksi, perhitungan selisih, dan verifikasi tersebut, diperoleh pembuktian bahwa graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ dapat diberikan pelabelan rata-rata skolem *difference*. Metode ini sepenuhnya bersifat analitik dengan mengandalkan penurunan matematis dan pemeriksaan struktur graf tanpa melibatkan eksperimen komputasional.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil konstruksi pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf gunung api dan graf $(C_3 \triangleright S_n)$ berdasarkan metode yang telah dijelaskan sebelumnya. Analisis dilakukan dengan menelusuri struktur masing-masing graf, memberikan penomoran pada simpul, serta menghitung nilai sisi sesuai aturan selisih skolem *difference*. Dengan demikian, bagian ini memberikan penjelasan komprehensif mengenai pembuktian masing-masing graf dapat dikategorikan sebagai graf rata-rata skolem *difference* melalui proses konstruksi dan verifikasi yang sistematis.

a. Graf gunung api

Graf gunung api V_n dengan order n dan ukuran $n + 3$ adalah graf yang dibangun dari graf siklus C_3 dan graf bintang S_n dengan menempelkan simpul pusat graf bintang (simpul berderajat n) dengan salah satu simpul pada graf siklus C_3 (Dafik dkk., 2023). Graf gunung api V_n memiliki himpunan simpul $V(V_n) = \{u_i | i = 1, 2, 3\} \cup \{v_j | j = 1, 2, \dots, n\}$ dan himpunan sisi $E(V_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1\} \cup \{u_1v_j | j = 1, 2, \dots, n\}$. Gambar 1 adalah contoh penotasian simpul dan sisi pada graf gunung api.



Gambar 1. Graf gunung api V_n

Teorema 1. Untuk setiap $n \geq 1$, graf gunung api V_n adalah graf rata-rata skolem *difference*.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa graf gunung api V_n adalah graf rata-rata skolem *difference* yaitu dengan mendefinisikan fungsi pelabelan yang memenuhi syarat pelabelan rata-rata skolem *difference*. Definisikan fungsi injektif $f: V(V_n) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2n + 6\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } i = 1, 2, \\ 2n + 6, & \text{untuk } i = 3. \end{cases}$$

$$f(v_j) = 2j + 2, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n.$$

Jika f^* merupakan pelabelan sisi yang diinduksi dari f , maka

$$f^*(u_1u_2) = 1.$$

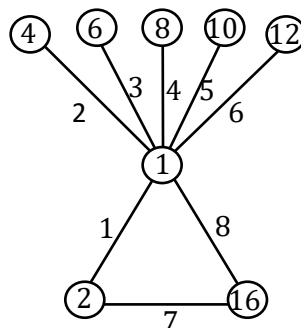
$$f^*(u_2u_3) = n + 2.$$

$$f^*(u_1u_3) = n + 3.$$

$$f^*(u_1v_j) = j + 1, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n.$$

Dengan mudah dapat diketahui bahwa label setiap sisi yang terinduksi dari label simpul bersifat bijektif, sehingga fungsi pelabelan f dan f^* memenuhi syarat pelabelan rata-rata skolem *difference*. Terbukti bahwa graf gunung api V_n adalah graf rata-rata skolem *difference*. ■

Sebagai contoh, Gambar 2 adalah pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf gunung api V_5 .



Gambar 2. Pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf gunung api V_5

b. Graf $C_3 \triangleright S_n$

Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan $u \in V(H)$. Operasi *comb* dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan G dan $|G|$ salinan dari H selanjutnya melekatkan simpul u dari masing-masing graf H salinan ke- i pada simpul ke- i dari graf G (Chartran dan Zhang, 2008).

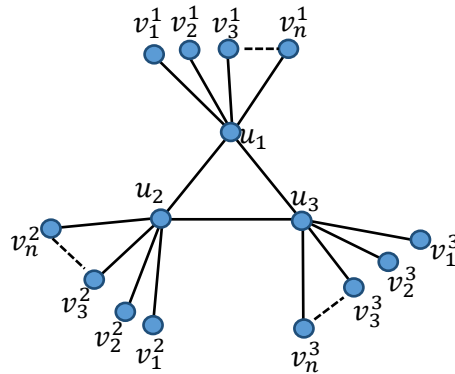
Teorema 2. Untuk setiap $n \geq 1$, graf $C_3 \triangleright S_n$ adalah graf rata-rata skolem *difference*.

Bukti. Langkah pertama untuk menunjukkan bahwa graf $C_3 \triangleright S_n$ adalah graf rata-rata skolem *difference* yaitu dengan menotasikan himpunan simpul dan sisi pada graf $C_3 \triangleright S_n$. Penotasian himpunan simpul dan sisi pada graf $C_3 \triangleright S_n$ adalah sebagai berikut.

$$V(C_3 \triangleright S_n) = \{u_i | i = 1, 2, 3\} \cup \{v_j^i | i = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(C_3 \triangleright S_n) = \{u_1 u_2, u_2 u_3, u_3 u_1\} \cup \{u_i v_j^i | i = 1, 2, 3 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n\}$$

Gambar 3 merupakan ilustrasi penotasian simpul dan sisi pada graf $C_3 \triangleright S_n$



Gambar 3. Graf $C_3 \triangleright S_n$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa terdapat fungsi f dan f^* yang memenuhi kaidah pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf $C_3 \triangleright S_n$. Definisikan fungsi $f: V(C_3 \triangleright S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6n + 6\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i) = \begin{cases} i & , \text{ untuk } i = 1, 2, \\ 6n + 6, & \text{ untuk } i = 3. \end{cases}$$

Untuk $j = 1, 2, \dots, n$.

$$f(v_j^i) = \begin{cases} 2j + 2 & , \text{ untuk } i = 1, \\ 2(n + j) + 3, & \text{ untuk } i = 2, \\ 2j + 3 & , \text{ untuk } i = 3. \end{cases}$$

Jika f^* merupakan pelabelan sisi yang diinduksi dari f , maka

$$f^*(u_1 u_2) = 1.$$

$$f^*(u_2 u_3) = 3n + 2.$$

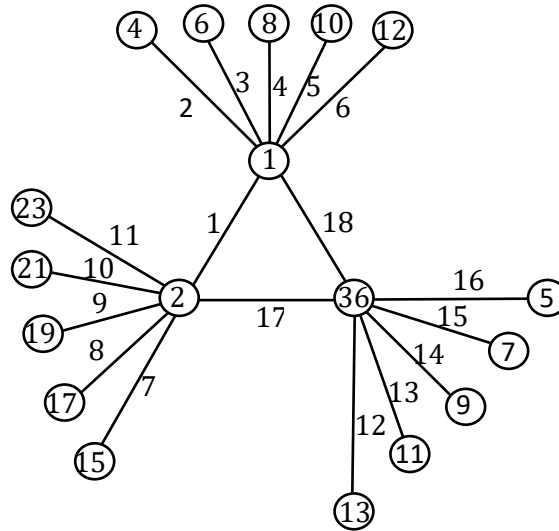
$$f^*(u_1 u_3) = 3n + 3.$$

Untuk $j = 1, 2, \dots, n$.

$$f(v_j^i) = \begin{cases} j + 1 & , \text{ untuk } i = 1, \\ n + j + 1, & \text{ untuk } i = 2, \\ 3n - j + 2, & \text{ untuk } i = 3. \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi di atas, diketahui bahwa fungsi f injektif dan f^* bersifat bijektif. Terbukti bahwa fungsi tersebut memenuhi kaidah pelabelan rata-rata skolem *difference*, sehingga graf $C_3 \triangleright S_n$ adalah graf rata-rata skolem *difference*. ■

Sebagai contoh, Gambar 4 adalah pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf $C_3 \triangleright S_5$.



Gambar 4. Pelabelan rata-rata skolem *difference* pada graf $C_3 \triangleright S_5$

4 KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menunjukkan bahwa baik graf gunung api maupun graf $C_3 \triangleright S_5$ memenuhi karakteristik sebagai graf rata-rata skolem *difference*. Melalui konstruksi fungsi pelabelan yang bersifat injektif pada himpunan simpul serta verifikasi nilai pelabelan sisi yang diinduksi dari selisih label simpul, diperoleh bahwa seluruh sisi pada kedua graf memiliki nilai unik dalam rentang 1 sampai q dengan q banyak sisi pada graf, sehingga memenuhi syarat bijektif. Hasil ini menegaskan bahwa struktur kedua graf memungkinkan pembentukan pelabelan rata-rata skolem *difference* yang valid dan konsisten dengan definisi formalnya. Temuan ini menambah daftar kelas graf yang terbukti memiliki pelabelan rata-rata skolem *difference* serta membuka peluang eksplorasi lebih lanjut pada kelas graf lainnya. Kajian lanjutan dapat diarahkan pada perluasan karakteristik pelabelan, analisis pola umum konstruksi pelabelan, maupun penerapan pelabelan ini dalam konteks komputasi dan jaringan.

DAFTAR PUSTAKA

- Balaji, V., Ramesh, D. S. T., & Subramanian, A. (2007). Skolem mean labeling. *Bull. Pure and Applied Sci. E*, 26, 245-248.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2008). *Chromatic Graph Theory*. New York: Chapman and Hall/CRC.
- Dafik, D., Wahidah, R. N., Albirri, E. R., & Husain, S. K. S. (2023). On the study of Rainbow Antimagic coloring of special graphs. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 7(4), 585-596.

- Fajria, I. L., Yundari, Y., & Fran, F. Pelabelan Rata-Rata Skolem Difference Pada Graf H-Bintang ($H(S_n)$). *BIMASTER: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 12(5). 405 – 414. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v12i5.70891>
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>
- Komarullah, H., & Rosyidah, S. Z. (2025, August). Aplikasi Teori Dominating Set Dalam Penentuan Lokasi Pelayanan Pembuatan KTP di Kabupaten Jember. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 834-840).
- Murugan, K., & Subramanian, A. (2011). Skolem difference mean labeling of H-graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 1(1), 115-129.
- Nurfadila, R. A., Saputri, M. D., & Komarullah, H. (2025). Pencarian Jalur Evakuasi Terdekat Siaga Tsunami Pantai Selatan Jember Menggunakan Algoritma Dijkstra. *As-Sunniyyah*, 4(02), 102-108. <https://doi.org/10.62097/assunniyyah.v4i02.2137>
- Parmar, D., & Vaghela, U. (2019). Skolem difference mean labeling of some path related graphs. *Pramana Research Journal*, 9(5), 651-657.
- Prasanna, N. L., Sravanthi, K., & Sudhakar, N. (2014). Applications of graph labeling in communication networks. *Oriental Journal of Computer Science and Technology*, 7(1), 139-145. <http://www.computerscijournal.org/pdf/vol7no1/OJCSV07I1P139-145.pdf>
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>
- Sholehah, M., & Komarullah, H. (2025). Pemanfaatan Teori Graf Dalam Mendesain Struktur Kurikulum dan Keterkaitan Antar Kompetensi Dasar Matematika Kelas XI di SMK Al Ishaqi. *As-Sunniyyah*, 5(01), 39-45. <https://doi.org/10.62097/assunniyyah.v5i01.2522>