

## PELABELAN TITIK-SISI PRIMA PADA BEBERAPA POHON

Hafif Komarullah<sup>1\*</sup>, Siti Nur Afifah<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Tadris Matematika, Universitas Al Falah Assunniyyah, Jember, Indonesia*

<sup>2</sup>*Pendidikan Matematika, Universitas Jember, Jember, Indonesia*

\*Email: [hafif4@gmail.com](mailto:hafif4@gmail.com)

### ABSTRAK

Pelabelan titik-sisi prima merupakan proses pemberian bilangan bulat positif yang berbeda pada setiap titik dan setiap sisi graf, dengan menggunakan himpunan bilangan mulai dari satu hingga jumlah seluruh titik dan sisi. Setiap tiga elemen yang saling berkaitan, yaitu dua titik yang dihubungkan oleh sebuah sisi beserta sisi yang menghubungkan keduanya, harus memiliki label yang saling relatif prima. Graf yang dapat memenuhi ketentuan tersebut diklasifikasikan sebagai graf titik-sisi prima. Penelitian ini bertujuan menentukan dan membuktikan keberadaan pelabelan titik-sisi prima pada tiga kelas pohon, yaitu graf sapu, graf sisir, dan graf pohon Y. Metode penelitian menggunakan pendekatan analitis-deduktif melalui tahapan identifikasi struktur graf, penetapan himpunan label bilangan bulat positif berbeda, penyusunan konstruksi pelabelan berdasarkan hubungan keterhubungan titik dan sisi, pemeriksaan sifat relatif prima untuk seluruh pasangan titik-sisi yang bersesuaian, serta verifikasi matematis terhadap konsistensi dan keabsahan konstruksi. Penelitian ini menyimpulkan bahwa ketiga kelas pohon yang dikaji terbukti memiliki pelabelan titik-sisi prima yang valid, sehingga memperluas hasil penelitian sebelumnya mengenai pelabelan prima dan memperkuat pemahaman tentang perilaku pelabelan bilangan pada struktur pohon.

**Kata kunci:** pelabelan prima, pelabelan titik-sisi prima, graf pohon.

### 1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam matematika diskrit yang banyak digunakan untuk memodelkan berbagai permasalahan nyata, seperti jaringan otak (Sporns, 2018), struktur molekul (Mercado dkk., 2021), sistem transportasi (Guze, 2019), hingga perancangan jaringan komputer (Majeed & Rauf, 2020). Salah satu fokus kajian dalam teori graf yang terus berkembang adalah pelabelan graf, yaitu pemberian label berupa bilangan atau simbol pada elemen graf baik titik maupun sisi dengan aturan tertentu (Gallian, 2022). Penelitian mengenai pelabelan graf memiliki nilai teoretis yang signifikan karena dapat menghasilkan karakteristik matematis baru yang relevan untuk berbagai aplikasi, termasuk kriptografi (Prihandoko dkk., 2019), penjadwalan (Komarullah & Fauzan, 2025), pencarian rute terpendek (Nurfadila dkk., 2025), dan penentuan frekuensi radio (Griggs & Yeh, 1992).

Beberapa jenis pelabelan graf sudah dikembangkan, pelabelan prima menjadi salah satu topik yang menarik untuk dikaji. Pelabelan prima diperkenalkan oleh Entringer (1980) sebagai pelabelan titik pada graf sederhana dengan memberikan bilangan-bilangan bulat positif berbeda sedemikian rupa sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki label yang saling relatif prima (Tout dkk., 1982). Dalam perkembangannya, konsep pelabelan prima diperluas menjadi pelabelan yang melibatkan titik dan sisi, salah satunya adalah pelabelan titik-sisi prima (*edge vertex prime labeling*). Misalkan  $G$  adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Pelabelan titik-sisi prima pada graf  $G$  didefinisikan oleh fungsi bijektif  $f: V(G) \cup$

$E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|$  sedemikian sehingga untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$ , pasangan label  $f(u), f(v)$ , dan  $f(uv)$  saling relatif prima. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan titik-sisi prima disebut graf titik-sisi prima (Jagadesh & Babujee, 2017).

Berbagai studi sebelumnya telah meneliti pelabelan titik-sisi prima pada berbagai kelas graf, seperti graf lintasan, graf siklus, graf bintang (Jagadesh & Babujee, 2017), graf roda, graf kipas, graf persahabatan (Parmar, 2017), graf kupu-kupu, graf Jahangir (Simaringa & Muthukumaran, 2019a), dan beberapa hasil lain dapat dilihat pada (Parmar, 2018; Shrimali & Parmar, 2019; Simaringa & Muthukumaran, 2019b; Shrimali & Parmar, 2020). Namun, kajian mengenai pelabelan titik-sisi prima pada graf pohon masih relatif terbatas. Pohon merupakan graf terhubung tanpa siklus dan memiliki karakteristik yang dapat dimanfaatkan untuk pengembangan pola pelabelan yang efisien. Beberapa jenis pohon yang menarik untuk diteliti meliputi graf sapu, graf sisir, dan graf pohon Y. Minimnya penelitian terkait pelabelan titik-sisi prima pada kelas pohon tertentu membuka peluang untuk merumuskan konstruksi baru dan menguji keberadaan pelabelan pada bentuk struktur yang lebih kompleks.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini dilakukan untuk menentukan konstruksi pelabelan titik-sisi prima pada beberapa kelas pohon (graf sapu, graf sisir, dan graf pohon Y), serta membuktikan keberadaan pelabelan tersebut melalui pendekatan analitis. Selain itu, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan pola pelabelan sistematis yang dapat digunakan sebagai dasar bagi studi lanjutan mengenai pelabelan graf pada tipe pohon lainnya. Penelitian ini diharapkan dapat memperkaya literatur pelabelan graf, khususnya dalam ranah pelabelan berbasis bilangan prima dan relatif prima, serta memberikan kontribusi matematis yang relevan dalam pengembangan teori graf modern.

## 2 METODE

Penelitian ini merupakan penelitian murni dalam bidang matematika dengan pendekatan analitis-deduktif yang berfokus pada konstruksi serta pembuktian keberadaan pelabelan titik-sisi prima pada tiga kelas pohon, yaitu graf sapu, graf sisir, dan graf pohon Y. Seluruh objek direpresentasikan sebagai graf sederhana, terhubung, dan bebas siklus, masing-masing memiliki karakteristik struktural yang dianalisis secara mendalam sebagai dasar penyusunan pola pelabelan. Pengumpulan data dilakukan melalui telaah literatur terkait teori graf, pelabelan prima, serta pelabelan titik-sisi, yang digunakan sebagai landasan teoretis dalam merumuskan konstruksi pelabelan. Analisis penelitian meliputi identifikasi struktur tiap graf, penentuan himpunan bilangan sebagai label, penyusunan konstruksi pelabelan yang memenuhi sifat relatif prima, pemeriksaan seluruh pasangan titik-sisi yang berkaitan, serta penyusunan bukti formal untuk memastikan keberlakuan pelabelan pada setiap kelas pohon. Validasi dilakukan melalui verifikasi matematis internal untuk menjamin konsistensi logis seluruh langkah analisis dan pembuktian, serta melalui perbandingan hasil dengan temuan penelitian terdahulu untuk memastikan keselarasan teoretis. Penelitian ini bertujuan menghasilkan pola pelabelan titik-sisi prima yang valid dan dapat digeneralisasikan pada struktur pohon sejenis dalam ranah teori graf. Dalam membuktikan dua bilangan relatif prima, disajikan beberapa Lemma sebagai berikut.

**Lemma 1.** (Komarullah dkk., 2024) Misalkan  $a$  adalah bilangan ganjil. Jika  $b \in \mathbb{Z}^+$  tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berlaku  $\gcd(a, a + b) = 1$ .

**Lemma 2.** (Sukirman, 2016) Untuk setiap dua bilangan bulat berurutan  $a$  dan  $a + 1$ , berlaku  $\gcd(a, a + 1) = 1$ .

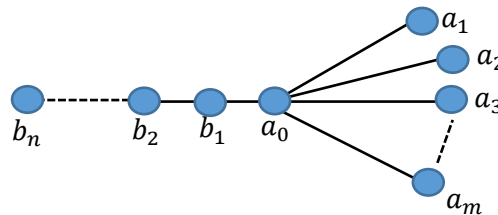
**Lemma 3** (Sukirman, 2016) Dua bilangan  $a, b \in \mathbb{Z}$  merupakan saling relatif prima jika terdapat  $x, y \in \mathbb{Z}$  sehingga memenuhi persamaan Bézout  $ax + by = 1$ .

### 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini akan membahas secara mendalam mengenai pelabelan titik-sisi prima pada beberapa kelas graf pohon, yaitu graf sapu, graf sisir, dan graf pohon Y. Pembahasan pada bagian ini diarahkan untuk mengidentifikasi pola-pola pelabelan yang mungkin, membuktikan keberadaan label yang valid, serta mengonstruksi skema pelabelan yang memenuhi syarat untuk masing-masing kelas graf. Setiap graf akan dianalisis berdasarkan struktur dasarnya, jumlah titik dan sisi, serta aturan pelabelan titik-sisi prima yang diterapkan.

#### 3.1 Graf Sapu

Graf sapu dinotasikan dengan  $Br_{n,m}$  adalah graf berorder  $m + n + 1$  dan berukuran  $m + n$  yang dibangun dari graf bintang  $S_m$  dan graf lintasan  $P_n$  dengan menempelkan titik berderajat  $m$  dari graf bintang dengan salah satu titik ujung graf lintasan (titik berderajat 1). Graf sapu  $Br_{n,m}$  memiliki himpunan titik  $V(Br_{n,m}) = \{b_i; i \in [1, n]\} \cup \{a_j; j \in [0, m]\}$  dan himpunan sisi  $E(Br_{n,m}) = \{b_i b_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{a_0 b_1, a_0 a_j; j \in [1, m]\}$ . Contoh ilustrasi dari graf sapu dapat dilihat pada Gambar 1.



**Gambar 1.** Graf sapu

**Teorema 1.** Graf sapu  $Br_{n,m}$  dengan  $n \geq 1$  dan  $m \geq 2$  merupakan graf titik-sisi prima.

**Bukti.** Dalam membuktikan bahwa graf sapu  $Br_{n,m}$  adalah graf titik-sisi prima yaitu dengan mengkonstruksi pelabelan pada graf tersebut yang memenuhi aturan pelabelan titik-sisi prima. Definisikan fungsi  $f: V(Br_{n,m}) \cup E(Br_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2(m+n) + 1\}$  sebagai berikut.

$$f(a_j) = 2j + 1; j = 0, 1, \dots, m.$$

$$f(b_i) = 2(m + i) + 1; i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(a_0 a_j) = 2j; j = 1, 2, \dots, m.$$

$$f(a_0 b_1) = 2m + 2.$$

$$f(b_i b_{i+1}) = 2(m + i) + 2; i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Berdasarkan syarat pelabelan titik-sisi prima yaitu untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$ , pasangan label  $f(u), f(v)$ , dan  $f(uv)$  saling relatif prima. Akan ditunjukkan bahwa fungsi  $f$  memenuhi aturan tersebut.

- Label titik  $a_0$  dan titik  $a_j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, m$ , relatif prima karena  $a_0 = 1$  relatif prima terhadap semua bilangan. Label titik  $a_0$  dan sisi  $a_0 a_j$  relatif prima dengan alasan yang sama.
- Label sisi  $a_0 a_j$  dan titik  $a_j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, m$  relatif prima karena konsekutif (bilangan yang berurutan).
- Label titik  $a_0$  dan titik  $b_1$  relatif prima karena  $a_0 = 1$ .
- Label sisi  $a_0 b_1$  dan titik  $b_1$  relatif prima karena konsekutif.
- Label titik  $b_i$  dan titik  $b_{i+1}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  relatif prima. Diketahui bahwa  $|f(b_i) - f(b_{i+1})| = |(2(m + i) + 1) - (2(m + i + 1) + 1)| = 2$ . Karena  $f(b_i)$  ganjil dan

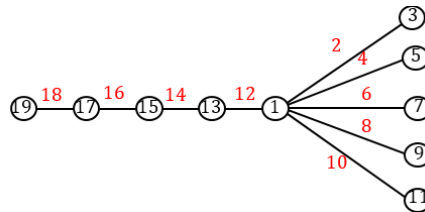
2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 terbukti bahwa  $\gcd(f(b_i), f(b_{i+1})) = 1$ .

vi. Label titik  $b_i$  dan sisi  $b_i b_{i+1}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  relatif prima karena konsekutif.

vii. Label sisi  $b_i b_{i+1}$  dan titik  $b_{i+1}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  relatif prima karena konsekutif.

Berdasarkan penjabaran di atas dapat diverifikasi bahwa fungsi  $f$  memenuhi aturan pelabelan titik-sisi prima. Sehingga terbukti bahwa graf sapu  $Br_{n,m}$  adalah graf titik-sisi prima. ■

Gambar 2 adalah contoh pelabelan titik-sisi prima pada graf sapu.



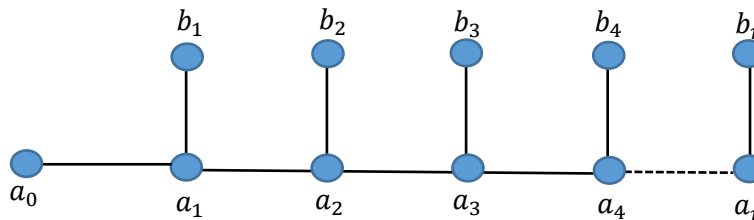
**Gambar 2.** Pelabelan titik-sisi prima pada graf sapu  $Br_{4,5}$

### 3.2 Graf Sisir

Graf sisir adalah graf dengan order  $2n + 1$  dan ukuran  $2n$  dinotasikan dengan  $Cb_n$  adalah graf yang dibangun dari graf lintasan  $P_{n+1}$  yang setiap titik pada graf lintasan (selain salah satu titik ujung) dihubungkan dengan graf kosong  $\bar{K}_1$ .

**Teorema 2.** Graf sisir  $Cb_n$  dengan  $n \geq 2$  merupakan graf titik-sisi prima.

**Bukti.** Graf sisir  $Cb_n$  memiliki himpunan titik  $V(Cb_n) = \{b_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{a_j; j = 0, 1, \dots, n\}$  dan himpunan sisi  $E(Cb_n) = \{a_j a_{j+1}; j \in [0, n - 1]\} \cup \{b_i a_j; i = j; i, j \in [1, n]\}$ . Gambar 3 contoh dari graf sisir  $Cb_n$ .



**Gambar 3.** Graf sisir  $Cb_n$

Definisikan fungsi  $f: V(Cb_n) \cup E(Cb_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n + 1\}$  sebagai berikut.

$$f(a_j) = \begin{cases} 1 & ; j = 0, \\ 4j - 1; & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

$$f(b_i) = 4i + 1; i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(a_j a_{j+1}) = 4j + 2; j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

$$f(b_i a_j) = 4i; i = j.$$

Akan ditunjukkan bahwa label pada fungsi  $f$  memenuhi kaidah pelabelan titik-sisi prima.

i. Diketahui bahwa  $|f(a_0) - f(a_1)| = 2$ , sehingga berdasarkan Lemma 1  $\gcd(f(a_0), f(a_1)) = 1$ .

ii. Nilai dari  $|f(a_j) - f(a_{j+1})| = 4$ . Karena 4 tidak memiliki factor ganjil selain satu, maka berdasarkan Lemma 1  $\gcd(f(a_j), f(a_{j+1})) = 1$ .

- iii. Dengan cara yang sama, untuk setiap  $i = j$ , nilai  $|f(a_j) - f(b_i)| = 2$ . Berdasarkan Lemma 1,  $\gcd(f(a_j), f(b_i)) = 1$ .
- iv. Label titik  $a_0$  dan label sisi  $a_0a_1$  relatif prima karena konsekutif.
- v. Label setiap titik dan sisi bersisian relatif prima karena konsekutif.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap  $a, b \in V(Cb_n)$  dan  $ab \in E(Cb_n)$  dengan  $a$  dan  $b$  bertetangga pasangan  $f(a), f(b)$ , dan  $f(ab)$  saling relatif prima. Terbukti bahwa fungsi  $f$  memenuhi aturan pelabelan titik-sisi prima, sehingga terbukti bahwa graf sisir  $Cb_n$  adalah graf titik-sisi prima. ■

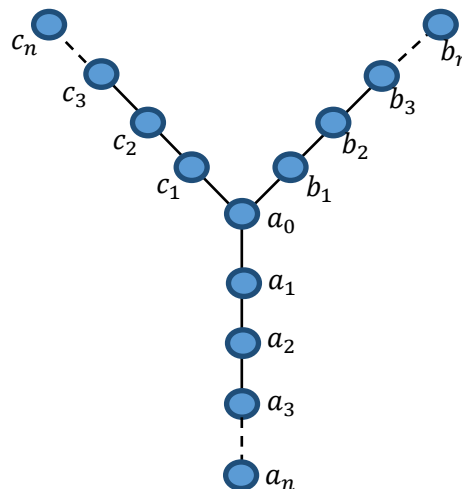
### 3.3 Graf Pohon Y

Graf pohon  $Y$  dinotasikan dengan  $P_n^3$  adalah graf berorder  $3n + 1$  dan berukuran  $3n$  yang dibangun dari 3 graf lintasan  $P_n$  yang salah satu titik ujungnya ditempelkan menjadi satu titik yang disebut sebagai titik pusat. Penotasian simpul dan sisi pada graf pohon  $Y$  sebagai berikut.

$$V(P_n^3) = \{a_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{b_j; j = 1, 2, \dots, n\} \cup \{c_k; k = 1, 2, \dots, n\}.$$

$$E(P_n^3) = \{a_i a_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{a_0 b_1, b_j b_{j+1}; j = 1, 2, \dots, n-1\} \\ \cup \{a_0 c_1, c_k c_{k+1}; k = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Gambar 4 adalah contoh graf pohon  $Y P_n^3$ .



**Gambar 4.** Graf Pohon  $Y P_n^3$

**Teorema 3.** Graf pohon  $Y P_n^3$  dengan  $n \geq 2$  merupakan graf titik-sisi prima.

**Bukti.** Dengan pendekatan serupa, pembuktian bahwa graf pohon  $Y P_n^3$  dengan  $n \geq 2$  termasuk dalam kategori graf titik-sisi prima dapat dilakukan dengan menyusun suatu aturan pelabelan yang memenuhi seluruh ketentuan pelabelan titik-sisi prima pada graf tersebut. Diberikan fungsi  $f$  yang didefinisikan  $f: V(P_n^3) \cup E(P_n^3) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6n + 1\}$  sebagai berikut.

$$f(a_i) = 2i + 1; i = 0, 1, \dots, n.$$

$$f(b_j) = 2(n + j) + 1; j = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(c_k) = 4n + 2k + 1; k = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(a_i a_{i+1}) = 2(i + 1); i = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$f(a_0 b_1) = 2n + 2.$$

$$f(b_j b_{j+1}) = 2(n + j + 1); j = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$f(a_0c_1) = 4n + 2.$$

$$f(c_kc_{k+1}) = 4n + 2k + 2; k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Label titik  $a_0 = 1$  relatif prima dengan label titik  $a_1, b_1$ , dan  $c_1$ . Label titik  $a_i$  dan  $a_{i+1}$ ,  $b_j$  dan  $b_{j+1}$ , serta  $c_k$  dan  $c_{k+1}$  masing-masing memiliki selisih dua, sehingga berdasarkan Lemma 2 setiap titik tersebut relative prima. Label titik dan sisi yang bersisian relative prima karena konsekutif. Jelas bahwa fungsi  $f$  memenuhi kaidah pelabelan titik-sisi prima, sehingga terbukti bahwa graf pohon Y adalah graf titik-sisi prima. ■

#### 4 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil konstruksi dan verifikasi matematis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa graf sapu, graf sisir, dan graf pohon Y terbukti memenuhi seluruh ketentuan pelabelan titik-sisi prima. Setiap graf berhasil diberi pelabelan melalui fungsi bijektif yang menetapkan bilangan bulat positif berbeda pada seluruh titik dan sisi, serta memastikan bahwa setiap tiga elemen yang saling berkaitan dua titik yang dihubungkan oleh satu sisi memiliki label yang saling relatif prima. Konstruksi pelabelan yang diperoleh pada masing-masing kelas graf tidak hanya valid, tetapi juga konsisten dan dapat digeneralisasikan terhadap struktur graf dengan orde lebih besar dalam kelas yang sama. Temuan ini menegaskan bahwa ketiga kelas pohon tersebut merupakan graf titik-sisi prima dan memperluas kajian pelabelan graf, khususnya dalam pengembangan pelabelan berbasis sifat relatif prima pada struktur pohon.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of combinatorics*. Vol. 6 (25), pp: 4-623.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586-595.
- Guze, S. (2019). Graph theory approach to the vulnerability of transportation networks. *Algorithms*, 12(12), 1-12. <https://doi.org/10.3390/a12120270>.
- Jagadeesh, R., & Babujee, J. B. (2017). On edge vertex prime labeling. *International journal of pure and applied mathematics*, 114(6), 209-218.
- Komarullah, H., & Fauzan, A. (2025, August). Pemanfaatan pewarnaan graf menggunakan algoritma welch-powell dalam menyusun jadwal ronda. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi" SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 923-930).
- Komarullah, H., Slamin, S., & Wijaya, K. (2024). Pelabelan Koprime Pada Amalgamasi Graf Lengkap dan Graf Berlian. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. 21(1), 1-12
- Majeed, A., & Rauf, I. (2020). Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks. *Inventions*, 5(1), 1-39. <https://doi.org/10.3390/inventions5010010>.
- Mercado, R., Rastemo, T., Lindelöf, E., Klambauer, G., Engkvist, O., Chen, H., & Bjerrum, E. J. (2021). Graph networks for molecular design. *Machine Learning: Science and Technology*, 2(2), 1-38. <https://doi.org/10.1088/2632-2153/abcf91>
- Nurfadila, R. A., Saputri, M. D., & Komarullah, H. (2025). Pencarian jalur evakuasi terdekat siaga tsunami pantai selatan jember menggunakan algoritma Dijkstra. *AS-SUNNIYYAH*, 4(02), 102-108. <https://doi.org/10.62097/assunniyyah.v4i02.2137>.
- Parmar, Y. M. (2017). Edge vertex prime labeling for wheel, fan and friendship graph. *International Journal of Mathematics and Statistics vention (IJMSI)*, 5(8), 23-29.
- Parmar, Y. M. (2018). Edge Vertex Prime Labeling for  $K_2, n$  and  $K_3, n$  Graphs. *Mathematical*

- Journal of Interdisciplinary Sciences*, 6(2), 167-180.
- Prihandoko, A. C., Dafik, D., & Agustin, I. H. (2019). Implementation of super H-antimagic total graph on establishing stream cipher. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(1), 14-23. <http://dx.doi.org/10.19184/ijc.2019.3.1.2>.
- Simaringa, M., & Muthukumaran, S. (2019a). Edge vertex prime labeling of some graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 7(2), 1-10.
- Simaringa, M., & Muthukumaran, S. (2019b). Edge vertex prime labeling of graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 7(3), 572-578.
- Shrimali, N. P., & Parmar, Y. M. (2019). Edge vertex prime labeling for some trees. *Journal of Applied Science and Computations*, 6(1), 1236-1249.
- Shrimali, N. P., & Parmar, Y. M. (2020). Edge vertex prime labeling for some graphs. *South East Asian Journal of Mathematics & Mathematical Sciences*, 16(1), 149-156.
- Sporns, O. (2018). Graph theory methods: applications in brain networks. *Dialogues in clinical neuroscience*, 20(2), 111-121. <https://doi.org/10.31887/DCNS.2018.20.2/osporns>.
- Sukirman. (2016). *Teori Bilangan, 1st ed.* Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.
- Tout, R., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *National Academy Science Letters-India*, 5(11), 365-368.