

PELABELAN $L(3,1)$ PADA BEBERAPA GRAF KHUSUS

Hafif Komarullah*

Program Studi Doktor Matematika, Universitas Brawijaya, Malang, Indonesia

*Email: hafif4@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas penerapan pelabelan $L(3,1)$ pada beberapa graf khusus, yaitu graf pohon pisang ($B_{m,n}$), graf kembang api ($F_{m,n}$), dan graf *peach* (C_n^m). Pelabelan $L(3,1)$ merupakan bentuk khusus dari pelabelan $L(h,k)$, dengan aturan bahwa setiap pasangan simpul yang berjarak satu memiliki perbedaan label sekurang-kurangnya tiga, sedangkan pasangan simpul yang berjarak dua memiliki perbedaan label sekurang-kurangnya satu. Tujuan penelitian ini adalah menentukan pola pelabelan yang memenuhi ketentuan tersebut dan memperoleh nilai rentang minimum (*span*) pada masing-masing graf. Metode yang digunakan adalah analisis deduktif matematis melalui konstruksi pelabelan dan pembuktian teoretis. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk graf pohon pisang ($B_{m,n}$), dengan $m \leq n - 4$, diperoleh $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) = n + 1$, untuk graf kembang api ($F_{m,n}$) dengan $n \geq 7$ dan $m \geq 2$, diperoleh $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) = n + 1$, sedangkan untuk graf *peach* (C_n^m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, diperoleh $\lambda_{3,1}(C_n^m) = m + 4$. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi pengembangan lebih lanjut dalam studi pelabelan $L(h,k)$ pada graf hasil operasi gabungan dan aplikasi jaringan komunikasi nirkabel.

Kata kunci: teori graf, pelabelan $L(3,1)$, graf pohon pisang, graf kembang api, graf *peach*.

1 PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam matematika diskrit yang memiliki peranan luas dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Dalam penerapannya, teori graf merepresentasikan objek dengan titik dan hubungan antar objek dengan sisi. Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pelabelan graf (*graph labeling*), yaitu pemberian label berupa bilangan atau simbol pada elemen-elemen graf (simpul maupun sisi) dengan aturan tertentu (Gallian, 2022). Studi mengenai pelabelan graf tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga memiliki aplikasi praktis, khususnya dalam pengalokasian frekuensi radio, kriptografi (Sudarsana dkk., 2021), serta jaringan komputer (DurgaPrasad dkk., 2017).

Salah satu jenis pelabelan yang banyak dikaji adalah pelabelan $L(h,k)$, yang diperkenalkan oleh Griggs dan Yeh (1992) dalam konteks penghindaran interferensi frekuensi pada jaringan komunikasi. Dalam pelabelan $L(h,k)$, setiap pasangan simpul yang berjarak satu diberi label yang berbeda sekurang-kurangnya sebesar h , sedangkan pasangan simpul yang berjarak dua unit diberi label berbeda sekurang-kurangnya sebesar k . Aturan ini bertujuan untuk memastikan agar dua simpul yang berdekatan tidak menggunakan frekuensi yang terlalu mirip sehingga dapat menimbulkan interferensi. Salah satu variasi penting dari konsep tersebut adalah pelabelan $L(3,1)$. Misalkan G adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan simpul $V(G)$. Pelabelan $L(3,1)$ pada graf G didefinisikan oleh fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ untuk setiap $a, b \in V(G)$ berlaku $|f(a) - f(b)| \geq 3$ jika $d(a, b) = 1$ dan $|f(a) - f(b)| \geq 1$ jika $d(a, b) = 2$. Nilai minimum k pada fungsi f dinotasikan dengan $\lambda_{3,1}(G)$ (Ghosh & Pal, 2016). Pelabelan $L(3,1)$ memiliki

kompleksitas yang lebih tinggi dibanding pelabelan $L(2,1)$, karena rentang label yang digunakan menjadi lebih luas untuk memenuhi syarat perbedaan label antar simpul. Penelitian mengenai pelabelan $L(3,1)$ menjadi relevan karena memberikan model yang lebih realistis dalam perancangan sistem komunikasi yang memerlukan tingkat keamanan dan kestabilan frekuensi lebih tinggi.

Beragam penelitian sebelumnya telah menelaah konsep pelabelan $L(h,k)$ dalam berbagai konteks graf. Griggs dan Yeh (1992) merupakan peneliti yang pertama kali memperkenalkan pelabelan $L(2,1)$ serta mengaplikasikannya pada beberapa kelas graf seperti graf lintasan, graf siklus, graf bintang, dan graf roda. Kajian serupa kemudian dikembangkan oleh sejumlah peneliti lain yang menerapkan pelabelan $L(2,1)$ pada berbagai jenis graf, di antaranya graf kipas (Fatimah dkk., 2016), graf Sierpinski (Sagala & Susiana, 2017), graf lolipop dan graf pendulum (Umam dkk., 2022), graf kerucut dan graf kecebong (Komarullah dkk., 2022), graf persahabatan (Halikin & Komarullah, 2022), graf gurita dan graf ubur-ubur (Komarullah, 2023), serta graf *dumbbell* (Komarullah dkk., 2025). Sementara itu, penelitian mengenai pelabelan $L(3,1)$ masih relatif terbatas. Beberapa di antaranya mencakup penerapan pada graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf bipartit, graf bintang, graf bistar (Ghosh & Pal, 2016), graf *supercycle* (Febryani dkk., 2023), graf hasil operasi comb antara graf bintang dan graf siklus (Aini dkk., 2025), graf kecebong, graf lolipop (Komarullah, 2025a), graf pendulum dan graf ilalang (Komarullah, 2025b).

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis dan menentukan pola pelabelan $L(3,1)$ pada beberapa jenis graf khusus (graf pohon pisang, graf kembang api, dan graf *peach*), serta mengidentifikasi nilai minimum rentang label yang mungkin dicapai. Hasil analisis ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan teori pelabelan graf serta penerapannya dalam bidang teknologi informasi, khususnya dalam optimalisasi alokasi sumber daya frekuensi pada jaringan komunikasi nirkabel.

2 METODE

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis matematis dengan pendekatan deduktif berbasis konstruksi dan pembuktian formal. Penelitian ini bersifat eksploratif matematis karena bertujuan menelaah dan menemukan pola pelabelan $L(3,1)$ pada graf yang belum diteliti sebelumnya. Objek penelitian meliputi tiga jenis graf, yaitu graf pohon pisang, graf kembang api, dan graf *peach*. Tahapan penelitian diawali dengan kajian literatur dan penelusuran konsep dasar pelabelan $L(3,1)$, untuk memperoleh landasan teoritis. Selanjutnya dilakukan pendefinisian formal dari setiap graf, termasuk himpunan titik ($V(G)$) dan himpunan sisi ($E(G)$). Proses analisis dilakukan dengan mengonstruksi pelabelan yang memenuhi ketentuan pelabelan $L(3,1)$ untuk setiap graf, kemudian menentukan nilai rentang minimum atau span. Setelah pelabelan diperoleh untuk graf berorde kecil, dilakukan generalisasi menggunakan metode induksi matematika atau observasi pola rekursif. Hasil pelabelan kemudian diverifikasi melalui pembuktian deduktif untuk memastikan kebenaran dan minimalitasnya, serta divalidasi dengan membandingkan hasil yang diperoleh terhadap penelitian terdahulu pada pelabelan $L(3,1)$.

Dalam membuktikan teorema yang dihasilkan dalam penelitian ini, peneliti memanfaatkan beberapa lemma berikut.

Lemma 1. Jika H adalah subgraf dari graf G , maka $\lambda_{3,1}(H) \leq \lambda_{3,1}(G)$ (Ghosh & Pal, 2016).

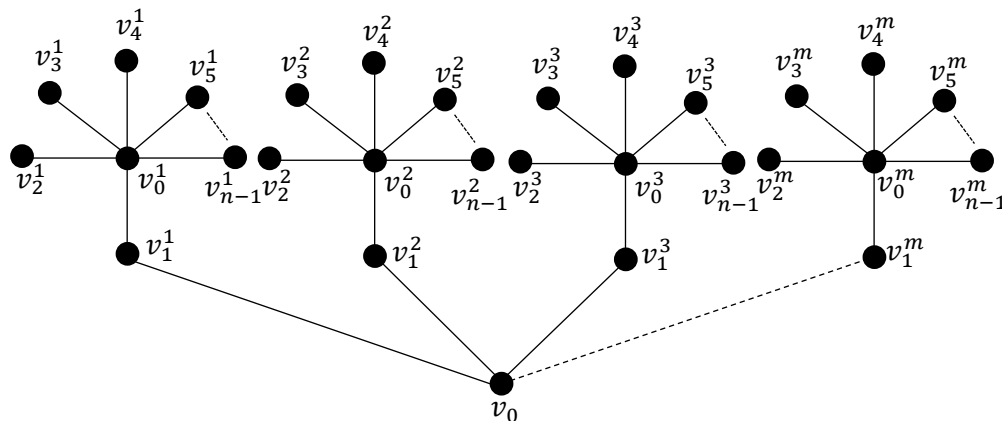
Lemma 2. Untuk setiap $n \geq 2$, $\lambda_{3,1}(S_n) = n + 2$ (Ghosh & Pal, 2016).

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian ini memaparkan penerapan pelabelan $L(3,1)$ pada tiga jenis graf khusus, yaitu graf pohon pisang ($B_{m,n}$), graf kembang api ($F_{m,n}$), dan graf *peach* (C_n^m).

3.1 Graf Pohon Pisang

Graf pohon pisang dengan order $mn + 1$ dan ukuran mn dinotasikan dengan $B_{m,n}$ adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan setiap daun pada graf bintang S_m dengan salah satu daun dari graf bintang S_{n-1} . Graf pohon pisang memiliki himpunan titik $V(B_{m,n}) = \{v_0\} \cup \{v_i^j \mid i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$ dan himpunan sisi $E(B_{m,n}) = \{v_0 v_1^j \mid j = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_0^j v_i^j \mid i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$. Gambar 1 adalah contoh dari graf pohon pisang.



Gambar 1. Graf pohon pisang

Teorema 1. Jika $B_{n,m}$ adalah graf pohon pisang dengan $m \leq n - 4$, maka $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) = n + 1$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) = n + 1$, maka harus ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \geq n + 1$ dan $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \leq n + 1$. Perhatikan bahwa graf bintang (S_{n-1}) merupakan subgraf dari graf pohon pisang ($B_{m,n}$). Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, diperoleh bahwa $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \geq \lambda_{3,1}(S_{n-1}) = n + 1$. Terbukti bahwa $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \geq n + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \leq n + 1$ dengan mengonstruksi fungsi yang memenuhi aturan pelabelan $L(3,1)$. Definisikan fungsi $f: V(B_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, n + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = n + 1.$$

$$f(v_0^j) = 0, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

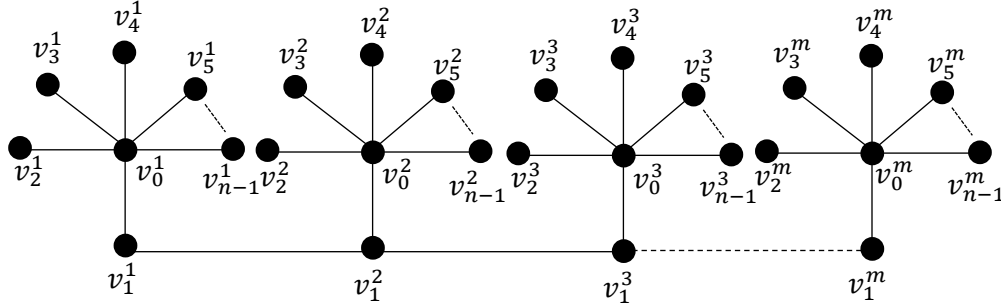
Untuk $j = 1, 2, \dots, m$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i + j + 1 & , \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n - j, \\ -n + i + j + 2, & \text{ untuk } i = n - j, n - j + 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa setiap titik berjarak satu memiliki beda label minimal 3 dan setiap titik berjarak dua memiliki beda label minimal 1. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi aturan pelabelan $L(3,1)$, sehingga $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \leq n + 1$. Karena $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \geq n + 1$ dan $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) \leq n + 1$, maka $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) = n + 1$. ■

3.2 Graf Kembang Api

Graf kembang api dengan order mn dan ukuran $mn - 1$ dinotasikan dengan $F_{m,n}$ adalah graf yang dibangun dari menempelkan salah satu daun dari graf bintang S_{n-1} ke setiap titik graf lintasan P_m . Graf kembang api memiliki himpunan titik $V(F_{m,n}) = \{v_i^j | i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$ dan himpunan sisi $E(F_{m,n}) = \{v_1^j v_1^{j+1} | j = 1, 2, \dots, m-1\} \cup \{v_0^j v_i^j | i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m\}$. Gambar 2 adalah contoh dari graf kembang api.



Gambar 2. Graf kembang api

Teorema 2. Jika $F_{m,n}$ adalah graf kembang api dengan $n \geq 7$ dan $m \geq 2$, maka $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) = n + 1$.

Bukti. Dengan cara yang sama akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) \geq n + 1$. Pandang bahwa graf bintang S_{n-1} adalah subgraf dari graf kembang api $F_{m,n}$. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 diperoleh bahwa $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) \geq \lambda_{3,1}(S_{n-1}) = n + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$ yaitu dengan mengkonstruksi fungsi untuk melabeli setiap titik pada graf kembang api $F_{m,n}$. Definisikan fungsi $f: V(F_{m,n}) \rightarrow \{0, 1, \dots, n + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_1^j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j \equiv 1 \pmod{4}, \\ n - 2, & \text{untuk } j \equiv 2 \pmod{4}, \\ 1, & \text{untuk } j \equiv 3 \pmod{4}, \\ n - 3, & \text{untuk } j \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$f(v_0^j) = n + 1, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m.$$

Untuk $j \equiv 1 \pmod{4}$

$$f(v_i^j) = i - 1, \text{ untuk } i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

Untuk $j \equiv 2 \pmod{4}$

$$f(v_i^j) = i - 2, \text{ untuk } i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

Untuk $j \equiv 3 \pmod{4}$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i, & \text{untuk } i = 2, 3, \dots, n - 2, \\ 0, & \text{untuk } i = n - 1. \end{cases}$$

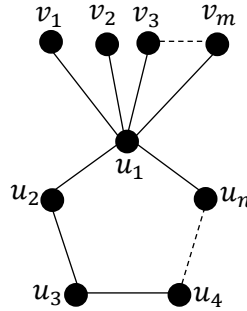
Untuk $j \equiv 0 \pmod{4}$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i - 2, & \text{untuk } i = 2, 3, \dots, n - 2, \\ n - 2, & \text{untuk } i = n - 1. \end{cases}$$

Dapat diverifikasi bahwa fungsi f memenuhi aturan pelabelan $L(3,1)$, sehingga $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$. Karena $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) \geq n + 1$ dan $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) \leq n + 1$, maka $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) = n + 1$. ■

3.3 Graf Peach

Graf *peach* dengan order dan ukuran $m + n$ adalah graf yang dibangun dari graf bintang S_m dan graf siklus C_n dengan menempelkan titik pusat graf bintang (titik berderajat m) dengan salah satu titik pada graf siklus. Himpunan titik dan sisi graf *peach* yaitu : $V(C_n^m) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, m\}$ dan $E(C_n^m) = \{u_1u_n, u_iu_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{u_1v_j; j = 1, 2, \dots, m\}$. Gambar 3 adalah contoh dari graf *peach*.



Gambar 3. Graf *peach*

Teorema 3. Jika C_n^m adalah graf *peach* dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, maka $\lambda_{3,1}(C_n^m) = m + 4$.

Bukti. Dalam menunjukkan nilai minimum span pada graf *peach*, maka akan ditunjukkan batas bawah dan batas atas pelabelan $L(3,1)$ pada graf *peach*. Perhatikan bahwa graf bintang S_{m+2} merupakan subgraf dari graf *peach*. Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, diperoleh $\lambda_{3,1}(C_n^m) \geq \lambda_{3,1}(S_{m+2}) = m + 4$, sehingga $\lambda_{3,1}(C_n^m) \geq m + 4$. Selanjutnya definisikan fungsi $f: V(C_n^m) \rightarrow \{0, 1, \dots, m + 4\}$ yang dipecah menjadi empat kasus sebagai berikut.

1. Kasus $n = 4$

$$f(u_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil,} \\ \frac{i}{2} + 3, & \text{untuk } i \text{ genap.} \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j = 1, \\ j + 4, & \text{untuk } j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

2. Kasus $n \equiv 1 \pmod 3$ dan $n \neq 4$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n, \\ 6, & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 3, & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 3, \\ 7, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} j + 2, & \text{untuk } j = 1, 2, 3, \\ j + 4, & \text{untuk } j = 4, 5, \dots, m. \end{cases}$$

3. Kasus $n \equiv 2 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n - 1, \\ 6, & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n, \\ 3, & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 3, \\ 7, & \text{untuk } i = n - 1, \\ 4, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 2j + 1, & \text{untuk } j = 1, 2, \\ j + 4, & \text{untuk } j = 3, 4, \dots, m. \end{cases}$$

4. Kasus $n \equiv 0 \pmod 3$

$$f(u_i) = \begin{cases} 0, \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n-2, \\ 6, \text{ untuk } i \equiv 2 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n-1, \\ 3, \text{ untuk } i \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } i \neq n, \\ 7, \text{ untuk } i = n-2, \\ 1, \text{ untuk } i = n-1. \\ 4, \text{ untuk } i = n. \end{cases}$$

$$f(v_j) = \begin{cases} 2j+1, \text{ untuk } j = 1, 2, \\ j+4, \text{ untuk } j = 3, 4, \dots, m. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa berdasarkan fungsi f setiap titik berjarak satu dan berjarak dua pada graf *peach* berturut-turut memiliki beda label minimal 3 dan 1. Sehingga, terbukti bahwa $\lambda_{3,1}(C_n^m) \leq m+4$. Karena $\lambda_{3,1}(C_n^m) \geq m+4$ dan $\lambda_{3,1}(C_n^m) \leq m+4$, maka $\lambda_{3,1}(C_n^m) = m+4$. ■

4 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis pelabelan $L(3,1)$ pada beberapa graf khusus, yaitu graf pohon pisang $(B_{m,n})$, graf kembang api $(F_{m,n})$, dan graf *peach* (C_n^m) , diperoleh hasil bahwa setiap graf memiliki nilai bilangan pelabelan yang bergantung pada struktur dan keterhubungan antar simpulnya. Untuk graf pohon pisang dengan dengan $m \leq n-4$, diperoleh $\lambda_{3,1}(B_{m,n}) = n+1$. Pada graf kembang api $(F_{m,n})$ dengan dengan $n \geq 7$ dan $m \geq 2$, nilai pelabelannya adalah $\lambda_{3,1}(F_{m,n}) = n+1$. Sedangkan untuk graf *peach* (C_n^m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, diperoleh $\lambda_{3,1}(C_n^m) = m+4$. Temuan ini menunjukkan bahwa karakteristik topologi graf berperan penting dalam menentukan rentang minimum pelabelan $L(3,1)$. Selain itu, hasil penelitian ini dapat menjadi dasar pengembangan teori pelabelan lanjutan pada graf dengan struktur yang lebih kompleks atau hasil operasi antar graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Aini, S., & Kusumah, Y. S. (2025). Nilai Minimum Span Pelabelan $L(3, 1)$ pada Graf Hasil Operasi Comb Antara Graf Bintang dan Graf Siklus. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(2), 29-36.
- DurgaPrasad, D., Muttipati, A. S., Snehadivya, M., & Kavitha, S. (2017). Applications of computer science based on graph theory. *International Journal of Engineering, Science and Mathematics*, 6(8), 1116-1117.
- Fatimah, S., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2016). Pelabelan $L(2, 1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2), 73-84.
- Febryani, F., Yulianti, K., Kusumah, Y. S., & Wijayanti, U. Nilai Minimal Span Pelabelan $L(3, 1)$ pada Graf Supercycle $Sc(n, r)$. *Jurnal EurekaMatika*, 11(2), 145-154. <https://doi.org/10.17509/jem.v11i2.66736>
- Gallian, J. A. (2022). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of combinatorics*. Vol. 6 (25), pp: 4-623.
- Ghosh, S., & Pal, A. (2016). $L(3, 1)$ -labeling of some simple graphs. *Advanced Modeling and Optimization*, 18(2), 243-248.
- Halikin, I., & Komarullah, H. (2022, February). Labelling of Generalized Friendship, Windmill, and Torch Graphs with a Condition at Distance Two. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 35-39). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.008>

- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62).
- Komarullah, H. (2025a). Pelabelan L (3, 1) Pada Graf Kecebong dan Graf Lolipop. *AL-MANTIQ: Journal of Mathematics Education, Mathematics Science and Applications*, 1(2), 74-80. <https://doi.org/10.62097/almantiq.v1i2.2480>
- Komarullah, H. (2025b). Span Terkecil dari Pelabelan L (3, 1) pada Graf Pendulum dan Graf Ilalang. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(3), 82-87. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v13n3.p82-87>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Saputri, M. D., & Nurfadila, R. A. (2025, August). Span terkecil dari pelabelan L(2,1) pada graf dumbbell. In *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi "SainTek"* (Vol. 2, No. 2, pp. 956-963).
- Sagala, Y., & Susiana. (2017). Pelabelan L(2,1) pada Graf Sierpinski S(n,k). *Karismatika*, 3(2), 130-139.
- Sudarsana, I. W., Suryanto, S. A., Lusianti, D., & Putri, N. P. A. P. S. (2021). An application of super mean and magic graphs labeling on cryptography system. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1763, No. 1, p. 012052). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1763/1/012052>
- Umam, I. A. I., Halikin, I., & Fatekurohman, M. (2022). L(2, 1) Labeling of Lollipop and Pendulum Graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 44-47). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.010>